Devoir maison du 24 septembre 2018
TSI 1

Exercice 1 : Révisions de trigonométrie

Partie A : Une inégalité

On considère un angle x quelconque compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Réaliser un dessin comprenant
   - un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$,
   - les deux points I et J tels que $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$,
   - le cercle trigonométrique Γ associé à $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$,
   - le point M de Γ tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) = x$,
   - le point A tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}\right) = x$ et AIO est rectangle en I,
   - le point H de $[OI]$ tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).
2. (a) Déterminer l'aire de la petite portion de disque délimitée par les points I, M et O en fonction de x, notée $\mathscr{A}_p$.
   (b) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle IMO, notée $\mathscr{A}_{IMO}$.
   (c) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle IAO, notée $\mathscr{A}_{IAO}$.
3. En déduire la série d'inégalités :

$$\boxed{\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \sin(x) \leq x \leq \tan(x)}$$

4. Enfin démontrer que

$$\boxed{\forall\, x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \qquad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1}$$

Partie B : Démonstration de formules

a et b désignent deux angles quelconques. Pour simplifier les dessins, on supposera que $(a;\ b) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[^2$.
Soit un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$ et Γ le cercle trigonométrique associé.
Soit $\vec{u}$ le vecteur normé (de norme 1) tel que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = a$ et soit $\vec{v}$ le vecteur normé tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.
Soit enfin le vecteur normé $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = b$.

1. Faire un dessin représentant la situation.
   (a) Déterminer en fonction de a et b l'angle $(\vec{\imath}, \vec{w})$.
   Indication: Rappeler puis utiliser la relation de Chasles sur les angles.
   (b) En déduire les coordonnées de $\vec{w}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$ en fonction de a et b.
2. (a) Donner, en fonction de b, les coordonnées de $\vec{w}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   (b) Donner, en fonction de a, les coordonnées de $\vec{u}$ puis celles de $\vec{v}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes une seconde expression des coordonnées de $\vec{w}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.
3. Quelles formules retrouve-t-on ainsi ?

Partie C : Tangente de l'angle moitié

θ désigne un angle quelconque compris strictement entre $-\pi$ et π.
Dans toute la suite, on pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

1. (a) Montrer que t est bien défini.
   (b) Rappeler puis démontrer les formules permettant d'obtenir $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *en utilisant uniquement les formules des sinus et cosinus de somme de deux angles.*
   (c) Montrer que $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{1+t^2}$
   (d) Déduire des deux questions précédentes les expressions de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
   (e) Enfin, déterminer l'expression de $\tan(\theta)$ en fonction de t.
2. En exploitant les formules précédentes, prouver que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution positive de l'équation

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. En utilisant une technique similaire, déterminer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$
4. En faisant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation

$$\cos(x) + 2\sin(x) = 0$$

   Indication: On exprimera les solutions à l'aide de la fonction arctan

Exercice 2 : Autour du poker

On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on tire sans remise 5 cartes.
Les figures sont les différentes valeurs (as, 7, 8, ..., roi).
Les couleurs sont pique, cœur, carreau trèfle.
Une main est composée de cinq cartes choisies dans le jeu. Dans tout ce qui suit, on ne prend pas en compte l'ordre des cartes dans la main.

Dans toutes les questions, on détaillera les calculs en utilisant le vocabulaire des dénombrements.

1. Donner le nombre de mains possibles.
2. Un carré est une main qui contient quatre cartes de la même figure.
   Déterminer le nombre total de carrés.
3. Un full comprend trois cartes d'une figure donnée et deux cartes d'une autre figure.
   Déterminer le nombre total de fulls.
4. Une double paire comprend deux cartes d'une figure donnée et deux cartes d'une autre figure.
   Déterminer le nombre total de doubles paires.
5. Déterminer le nombre mains comportant au moins un as de deux manières différentes.
6. Déterminer le nombre de mains comportant deux rois et trois piques (on notera que les trois piques peuvent éventuellement comporter un roi).