Devoir maison du 8 avril 2019
TSI 1

Ce devoir est à faire en binôme en rédigeant une copie par personne.

Exercice 1 — Comme un pétard mouillé

On dispose de n pétards qui sont restés un moment dans une cave humide. Le soir du 13 juillet, on essaie de tous les allumer. Chacun éclate, indépendamment des autres avec probabilité $p \in]0;\ 1[$.
On note X le nombre de ceux qui ont éclaté. On récupère ceux qui n'ont pas éclaté. On les laisse sécher une journée et on ajoute une nouvelle mèche. Le soir du 14 juillet, on tente à nouveau de les allumer. Chacun des pétards éclate alors indépendamment des autres avec probabilité $q \in]0, 1[$. On note Y le nombre de pétards qui ont éclaté soit le 13 soit le 14 juillet.

1. Quelle est la loi de X ? *Justifier soigneusement.*

> **Solution:** X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. En effet, chaque pétard explose indépendamment des autres avec la même probabilité.
> Ainsi $X \sim \mathscr{B}(n;\ p)$.

2. Calculer $P(Y = k|X = l)$ pour $l \leq k \leq n$.

> **Solution:** Pour X fixé, $Y - X$ suit une loi de Bernoulli de paramètres $n - X$ et q.
> On en déduit :
>
> $$\begin{aligned} P(Y = k|X = l) &= P(Y - X = k - l|X = l) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } k > n \text{ ou } k < l \\ \binom{n-l}{k-l} q^{k-l}(1-q)^{n-k} \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3. (a) Quelle est la loi de Y ?

> **Solution:** Pour trouver la loi de Y, on utilise ce qui précède et la formule des causes (ou probabilités totales). Ainsi, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$:
>
> $$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{0 \leq l \leq k} P(Y = k|X = l) \times P(X = l) \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k} \binom{n-l}{k-l} q^{k-l}(1-q)^{n-k} \times \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \end{aligned}$$
>
> Or, un peu de calcul montre que :
>
> $$\binom{n-l}{k-l} \times \binom{n}{l} = \binom{n}{k} \times \binom{k}{l}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}(1-q)^{n-k}\sum_{0\leq l\leq k}\binom{k}{l}q^{k-l}(1-p)^{k-l}p^l \\
&= \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}(1-q)^{n-k}\left(q(1-p)+p\right)^k \\
&= \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}(1-q)^{n-k}(q+p-pq)^k \\
&= \binom{n}{k}\left[(1-p)(1-q)\right]^{n-k}\left[1-(1-p)(1-q)\right]^k
\end{aligned}$$

On reconnaît que Y suit une loi binomiale de paramètres n et $1-(1-p)(1-q)$.

(b) Peut-on retrouver ce résultat en considérant le nombre de pétards qui n'ont pas éclaté ?

Solution: On considérant Z le nombre de pétards qui n'ont pas du tout éclaté, il est clair que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $(1-p)(1-q)$.
Et comme $Y = n-Z$, on peut retrouver le résultat précédent.

Exercice 2 ♣ Moyenne de Césaro

Soit une suite (u_n) qui tend vers une limite finie ℓ.

L'objectif est de prouver que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

1. Prouver que, pour tout n :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-\ell|$$

Solution: Pour tout n :

$$\begin{aligned}
v_n - \ell &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k - \ell \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n}u_k-(n+1)\ell\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n}\ell\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell)
\end{aligned}$$

En prenant la valeur absolue de cette dernière égalité, il vient :

$$|v_n - \ell| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \right| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \right|$$

En raison de l'inégalité triangulaire, on obtient le résultat attendu.

2. Soit p un entier fixé. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell|$$

Solution: Pour p fixé, le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell|$ est constant. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| = 0$$

3. (a) Déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{n\to+\infty} |v_n - \ell| = 0$$

Indication: Pour cette question, pas d'autre choix que de sortir les ε...

Solution: On va majorer les termes de l'expression $\frac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell|$.

Soit $\varepsilon > 0$

On sait que $|u_n - \ell| \to 0$. Donc il existe un rang p tel que pour tout $n \geq p$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Or, pour tout $n \geq p$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| + \sum_{k=p}^{n} |u_k - \ell| \right]$$

On en déduit ainsi :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| < \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| + (n-p+1)\frac{\varepsilon}{2} \right]$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| < \frac{1}{n+1} displaystyle \sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| + \frac{n-p+1}{n+1} \times \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais on a $\dfrac{n-p+1}{n+1} \leq 1$ et ainsi :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| < \frac{1}{n+1} displaystyle \sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais on sait que, pour p fixé, $\dfrac{1}{n+1} displaystyle \sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| \to 0$.

Ainsi, il existe $p' \geq p$ tel que, pour tout $n \geq p'$,

$$\frac{1}{n+1} displaystyle \sum_{k=0}^{p} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, on obtient bien, pour tout $n \geq p'$:

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui achève la démonstration.

(b) Quelle est la limite de (v_n) ?

Solution: D'après ce qui précède, la limite de (v_n) vaut ℓ

4. L'assertion suivante est-elle vraie ?
« Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ »

Solution: Cette assertion est fausse. En effet, considérons la suite $u_n = (-1)^n$ qui ne possède pas de limite.
On sait que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

Or cette dernière expression est bornée.
Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$$

La suite (u_n) constitue donc un contre exemple de l'assertion proposée.

Exercice 3 — Applications du théorème de Rolle

Partie A : règle de l'Hospital

Soient deux fonctions f et g définies et dérivables sur un intervalle ouvert I.
On suppose que g' ne s'annule pas sur I.

1. On fixe pour cette question $(a;\ b) \in I^2$ tels que $a \neq b$.
Soit la fonction ψ définie sur I par

$$\psi : t \mapsto g(t)\left[f(b) - f(a)\right] - f(t)\left[g(b) - g(a)\right]$$

(a) Montrer que $g(b) \neq g(a)$.

Solution: Pour tout $a \neq b$, on sait, par application du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]a;\ b[$ (ou $]b;\ a[$) tel que

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$$

Or $g'(c) \neq 0$, ce qui conduit à $g(b)-g(a) \neq 0$.

(b) Montrer que ψ est dérivable et que $\psi(a) = \psi(b)$.

Solution: ψ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables f et g.
Un peu de calcul permet de montrer que $\psi(a) = \psi(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$.

(c) En déduire qu'il existe un nombre c strictement compris entre a et b tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Solution: C'est une application directe du théorème de Rolle. On sait qu'il existe c compris entre a et b tel que $\psi'(c) = 0$. Or,

$$\psi'(c) = 0 \iff g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a)) \iff \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ car } g(b)-g(a) \neq 0$$

2. On fixe maintenant $a \in I$.
Déduire des deux questions précédentes que si $\lim\limits_{t \overset{\neq}{\to} a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe et vaut ℓ alors

$$\lim_{b \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \ell$$

Solution: On suppose que $\lim\limits_{t \overset{\neq}{\to} a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $c \in]a-\eta;\ a+\eta[$, on a $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \varepsilon$.

Mais on sait que, pour tout $b \in]a-\eta;\ a+\eta[\setminus\{a\}$, il existe $c \in]a;\ b[$ (ou $]b;\ a[$) tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
En particulier, dans ce cas, on sait que $c \in]a-\eta;\ a+\eta[$ donc :

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \varepsilon$$

On appelle *règle de l'Hospital* ce dernier résultat. La question suivante propose quelques applications de cette proposition.

3. On rappelle que $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. En utilisant (ou non) la règle de l'Hospital, déterminer les limites suivantes :

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

Solution: On obtient cette limite par application de la règle de l'Hospital : c'est $\dfrac{-1}{2}$.

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$$

Solution: On obtient cette limite par application de la règle de l'Hospital, en utilisant la limite précédente : c'est $\dfrac{-1}{6}$.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$$

Solution: Même procédé, on obtient $\dfrac{1}{24}$.

Partie B : Formule de Taylor-Cauchy

n désigne un entier naturel.

Soit f une fonction $(n+1)$−fois dérivable sur un intervalle ouvert I.
Dans toute la suite, on considère $(a;\ b) \in I^2$ tels que $a \neq b$.

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence de $\theta \in]a;\ b[$ (ou $]b;\ a[$) tel que

$$f(b) = \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \times (b-a)^{n+1}$$

1. On se place dans le cas où $n = 0$.
   (a) Montrer que, dans ce cas, la formule de Taylor-Cauchy est équivalente à

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\theta)$$

Solution: La formule de Taylor Cauchy dans ce cas donne :

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

C'est à dire

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\theta)$$

   (b) Quel résultat du cours garantit, dans ce cas, l'existence d'un tel nombre θ dans $]a;\ b[$ (ou $]b;\ a[$) ?

Solution: C'est la formule des accroissements finis.

2. On se place dans le cas général. C désigne un nombre fixé.
   Soit alors φ la fonction
$$\varphi : x \mapsto f(b) - \sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \times (b-x)^k - C(b-x)^{n+1}$$
   (a) Déterminer la valeur de $\varphi(b)$.

   Solution: On vérifie aisément que $\varphi(b) = 0$.

   (b) Montrer qu'il existe un unique nombre C tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$.
   Indication: Pour cela, on pourra préciser la nature de la fonction $C \mapsto f(b) - \sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k - C(b-a)^{n+1}$.

   Solution: On veut prouver qu'il existe une valeur de C telle que $\varphi(a) = 0$. Cela revient à trouver un zéro de la fonction $C \mapsto f(b) - \sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k - C(b-a)^{n+1}$.
   Or cette fonction est affine et son coefficient directeur $-(b-a)^{n+1}$ est non nul.
   En particulier, pour une valeur de C unique cette fonction s'annule. Pour cette valeur de C on obtient $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$.

   On suppose maintenant qu'on a choisi C de telle sorte que $\varphi(b) = \varphi(a)$

   (c) En appliquant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\theta \in]a;\ b[$ tel que
$$C = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

   Solution: La fonction φ est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables sur I. En effet, comme f est dérivable $(n+1)$-fois, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, $f^{(k)}$ est dérivable.
   L'application du théorème de Rolle montre qu'il existe $\theta \in]a;\ b[$ tel que $\varphi'(\theta) = 0$. Reste à calculer, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x)$. On obtient, en utilisant la formule de la dérivée d'un produit :
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} \times (b-x)^k + \sum_{1 \le k \le n} k(b-x)^{k-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} + (n+1)C(b-x)^n \\ &= -\sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} \times (b-x)^k + \sum_{1 \le k \le n} (b-x)^{k-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} + (n+1)C(b-x)^n\end{aligned}$$
   Or presque tous les termes des deux sommes s'éliminent. Il reste :
$$\varphi'(x) = -\frac{f^{n+1}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)C(b-x)^n$$
   Ainsi, $\varphi'(\theta) = 0 \iff -\frac{f^{n+1}(\theta)}{n!}(b-\theta)^n + (n+1)C(b-\theta)^n \iff C = \frac{1}{n+1} \times \frac{f^{n+1}(\theta)}{n!} = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$

(d) Conclure.

Solution: En remplaçant C dans l'expression de φ. On obtient :

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \times (b-x)^k - \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

Mais, on sait que $\varphi(a) = 0$, par construction. Ce qui donne :

$$f(b) - \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \times (b-a)^k - \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0$$

Cette dernière égalité est équivalente à la formule de Taylor-Cauchy.