Devoir maison du 21 novembre 2018
TSI 1

Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

> **Solution:** Pour tout réel x, $1+x^2>0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais. Le domaine de définition est bien $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout x, $\left|f(x)\right| \leq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

> **Solution:** Pour tout x, on a les équivalences suivantes :
>
> $$\begin{aligned} \left|f(x)\right| \leq \frac{1}{2} &\iff \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{|x|}{\left|1+x^2\right|} \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \text{ car } 1+x^2>0 \\ &\iff 0 \leq \frac{1+x^2-2|x|}{2(1+x^2)} \\ &\iff 0 \leq \frac{(1-|x|)^2}{2(1+x^2)} \text{ car } |x|^2 = x^2 \end{aligned}$$
>
> Or, cette dernière inégalité est vraie. Ainsi, on a bien prouvé l'inégalité de départ.

3. Calculer f' puis étudier les variations de f.

> **Solution:** Remarquons que f est impaire car pour tout x $f(-x) = -f(x)$. Il nous suffit donc d'étudier f' sur $\mathbb{R}^+$. Après calcul, on obtient, pour tout x :
>
> $$f'(x) = \frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$
>
> Pour obtenir les limites en l'infini, on lève les indéterminations en écrivant, pour tout $x \neq 0$:
>
> $$f(x) = \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
>
> On obtient ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.
> D'autre part, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = \frac{-1}{2}$
> Le numérateur est positif sur $[-1;\ 1]$ et négatif ailleurs. On obtient ainsi le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On remarque que ce tableau de variations nous fournit également la preuve du résultat de la seconde question, on a bien pour tout x $\left|f(x)\right| \leq \frac{1}{2}$

4. On définit la fonction $g : x \mapsto \sin\left(\pi f(x)\right)$.

   (a) Étudier la parité de g puis déterminer les variations de g en précisant ses limites.

Solution: Pour tout x, $g(-x) = -g(x)$ car f et sin sont impaires.
Remarquons que pour tout x réel, $\pi f(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ car $f(x) \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
Or, sur $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, sin est strictement croissante.
On en déduit que les variations de g sont celles de πf, c'est à dire celles de f.
On obtient ainsi le tableau de variations par compositions successives :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$\pi f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0
$\sin\left(\pi f(x)\right)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   (b) Donner une équation de la tangente à la courbe de g pour l'abscisse $x = 0$.

Solution: Il faut calculer, pour tout x, $g'(x)$. On obtient, grâce à la formule de dérivation composée :

$$g'(x) = \pi f'(x) \cos\left(\pi f(x)\right)$$

Cela donne $g'(0) = \pi f'(0) \cos(0) = \pi$.

   (c) Tracer le graphe de cette fonction dans le premier repère de l'annexe à rendre avec la copie.

Solution: Fait en annexe. On a aussi tracé la tangente.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que l'application f est bijective.

Solution: f est bijective car f admet une fonction réciproque : elle-même.
Sinon, on peut aussi montrer qu'elle est injective et surjective.
Pour l'injectivité : soient u et v tels que $f(u) = f(v)$. On en déduit $f\left(f(u)\right) = f\left(f(v)\right)$ c'est à dire $u = v$ car $f \circ f = \mathrm{id}$.
Pour la surjectivité : soit $y \in \mathbb{R}$. En posant $x = f(y)$, on a bien $f(x) = f\left(f(y)\right) = y$. Ainsi, y admet un antécédent.

b) Soit a un nombre tel que $f(a) \neq a$. Montrer que f n'est pas croissante sur le segment d'extrémités a et $f(a)$.

Solution: Par l'absurde. On suppose que f est croissante sur ce segment. On sait que $a \neq f(a)$ ainsi, ou bien $a < f(a)$ ou bien $a > f(a)$.
Considérons le premier cas : $a < f(a)$. Comme f est croissante, on obtient $f(a) \leq f \circ f(a)$, c'est à dire $f(a) \leq a$, ce qui est incompatible avec $a < f(a)$.
Considérons le second cas : $a > f(a)$. Comme f est croissante, on obtient $f(a) \geq f \circ f(a)$, c'est à dire $f(a) \geq a$, ce qui est incompatible avec $a > f(a)$.
Dans les deux cas, on aboutit donc à une situation absurde. Ainsi, f ne peut pas être croissante sous cette hypothèse.

c) On suppose que f est strictement monotone. Montrer que, ou bien f est strictement décroissante, ou bien, pour tout x, $f(x) = x$.

Solution: Par disjonction de cas :
Si, pour tout x, $f(x) = x$, alors le résultat est bien prouvé.
Dans le cas contraire, cela signifie qu'il existe a tel que $a \neq f(a)$. Or, on a montré à la question précédente que f ne pouvait alors pas être croissante. Comme f est strictement monotone par hypothèse, cela signifie que f est strictement décroissante. Le résultat est donc encore valable dans ce cas.

d) Déterminer une fonction g strictement décroissante telle que $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Solution: La fonction $x \mapsto -x$ convient.

Exercice 3

En détaillant la démarche, tracer la courbe de la fonction $x \mapsto |3x - 2| - 2|x + 1|$ dans le second repère donné en annexe.

Solution: Notons f cette fonction.
On procède par disjonction de cas sur les arguments des deux valeurs absolues.
Remarquons que $3x-2>0 \iff x>\frac{2}{3}$ et $x+1>0 \iff x>-1$.
Pour étudier cette fonction, il faut donc subdiviser l'axe des réels en trois.
Pour $x\in]-\infty;\ -1]$, on a $x+1\leq 0$ et $3x-2<0$. Ainsi, $f(x)=|3x-2|-2|x+1|=2-3x+2(x+1)=-x+4$.
Pour $x\in\left]-1;\ \frac{2}{3}\right]$, on a $x+1>0$ et $3x-2\leq 0$. Ainsi, $f(x)=|3x-2|-2|x+1|=2-3x-2(x+1)=-5x$.
Enfin, pour $x\in\left]\frac{2}{3};\ +\infty\right[$, on a $x+1>0$ et $3x-2>0$. Ainsi, $f(x)=|3x-2|-2|x+1|=3x-2-2(x+1)=x-4$.
En résumé, on peut réécrire la définition équivalente de f :

$$f:\ x\mapsto\begin{cases}-x+4 \text{ si } x\in]-\infty;\ -1]\\ -5x \text{ si } x\in\left]-1;\ \frac{2}{3}\right]\\ x-4 \text{ si } x\in\left]\frac{2}{3};\ +\infty\right[\end{cases}$$

Il s'agit donc d'une fonction affine par morceaux dont il est aisé de tracer la courbe.
Il suffit de calculer $f(-1)=5$, puis $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-10}{3}$ et d'utiliser les coefficients directeurs pour compléter les tracés.
Voir l'annexe.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes. On sera attentif au domaine de validité des expressions.

a)

$$\arcsin(2x)=\arccos(x)$$

Solution: Il faut $x\in[-1;\ 1]$ et $2x\in[-1;\ 1]$ en raison des domaines de définition de arcsin et arccos.
Ainsi, il faut $x\in\left[\frac{-1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.
En raison des domaines images de ces deux fonctions, on en déduit aussi que $\arcsin(2x)$ et $\arccos(x)$ sont dans $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\cap[0;\ \pi]$, c'est à dire $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
En particulier, x est forcément positif, c'est à dire dans $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$.
Sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, sin est injective, on a donc les équivalences :

$$\arcsin(2x)=\arccos(x) \iff 2x=\sin\left(\arccos(x)\right)$$

Posons $u=\arccos(x)$. On sait que $u\in[0;\ \pi]$ et que $\cos(u)=x$. Or on cherche $\sin(u)$. Mais on sait que $\sin^(u)=1-\cos^2(u)$, ce qui donne $\sin(u)=\sqrt{1-x^2}$ car $u\in[0;\ \pi]$ (et donc $\sin(u)\geq 0$).
Finalement, on a

$$\arcsin(2x)=\arccos(x) \iff 2x=\sqrt{1-x^2}$$

Cette dernière équation a comme solution $\frac{\sqrt{5}}{5}$ qui est bien dans le domaine de validité.

b)

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Solution: On pose pour tout x, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Cette fonction est le double de celle étudiée dans l'exercice 1. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et ses valeurs sont dans l'intervalle $[-1;\ 1]$.

En particulier, on en déduit que $\arcsin\big(f(x)\big)$ existe pour tout x.

Et comme à la fois $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\dfrac{\pi}{3}$ sont dans $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, on peut raisonner par équivalences :

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \iff \frac{2x}{1+x^2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x^2\sqrt{3} - 4x + \sqrt{3} = 0$$

En résolvant cette dernière équation, on obtient les solutions $\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c)

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$$

Solution: Cette expression est a priori définie sur $\mathbb{R}$.

x ne peut pas être négatif car dans ce cas, on aurait $\arctan(x) < 0$ et $\arctan(2x) < 0$ et donc $\arctan(x) + \arctan(2x) < 0$.

De même, x ne peut pas être supérieur à 1 car dans ce cas, on aurait $\arctan(x) > \dfrac{\pi}{4}$ et $\arctan(2x) > \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\arctan(x) + \arctan(2x) > \dfrac{\pi}{2}$.

On doit donc supposer que $x \in [0;\ 1[$. Dans ce cas, les deux membres de l'égalité appartiennent à $\left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ et on peut raisonner par équivalences en appliquant tangente :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \tan\left(\arctan(x) + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

Cette dernière égalité donne :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan(x) + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4} &\iff \frac{x+2x}{1-2x^2} = 1\\ &\iff \frac{2x^2+3x-1}{1-2x^2} = 0\end{aligned}$$

On obtient la seule solution valide $\dfrac{\sqrt{17}-4}{4}$.

Annexe à rendre avec la copie