Devoir maison du 7 janvier 2019
TSI 1

Ce devoir est à faire en binôme en rédigeant une copie par personne.

Exercice 1 — fonctions Python pour la géométrie dans l'espace

L'évaluation de cet exercice se fera à partir d'un fichier que chaque binôme déposera dans ce répertoire partagé : https://edu-nuage.ac-versailles.fr/s/PcrbGLBBZEKfMFk (le lien est également sur le blog).

Le fichier aura pour nomenclature `Nom_Binome_DM3.py`. Le code devra être commenté en laissant apparaître le numéro des questions ainsi que toute information permettant de mieux comprendre les calculs ou instructions. Enfin, le fichier ne devra pas comporter d'erreurs de syntaxe. Donc, avant de l'envoyer, vérifier qu'il s'exécute correctement.

On suppose que les coordonnées fournies par l'utilisateur sont relatives à une base orthonormée directe.

Voici maintenant les questions :

1. Écrire une fonction nommée `ProduitScalaire` qui :
   - prend pour argument deux listes contenant les coordonnées de deux vecteurs ;
   - renvoie en sortie le produit scalaire de ces deux vecteurs.
2. Écrire une fonction nommée `Norme` qui :
   - prend pour argument une liste contenant les coordonnées d'un vecteur ;
   - renvoie en sortie la norme de ce vecteur.
3. Écrire une fonction nommée `ProduitVectoriel` qui :
   - prend pour argument deux listes contenant les coordonnées de deux vecteurs ;
   - renvoie en sortie une liste contenant les coordonnées du produit vectoriel de ces deux vecteurs.
4. Écrire une fonction nommée `Determinant` qui :
   - prend pour argument trois listes contenant les coordonnées de trois vecteurs ;
   - renvoie en sortie le déterminant de ces trois vecteurs.
5. Écrire une fonction nommée `BaseOrthonormee` qui :
   - prend pour argument deux listes contenant les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
   - renvoie en sortie une liste de deux listes contenant les coordonnées des deux vecteurs d'une base orthonormée d'un plan de direction $(\vec{u};\ \vec{v})$.

Exercice 2 — trigonométrie hyperbolique

Soient les fonctions $\cosh : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\tanh : x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Partie A : quelques propriétés des fonctions hyperboliques

1. Déterminer les domaines de définition, les tableaux de signes et la parité de sinh et cosh
2. a et b désignent deux nombres. Prouver les égalités suivantes :

   (a)
$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

(b)
$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$$

(c)
$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$$

3. En exploitant la parité des fonctions, les trois formules établies précédemment, et en s'inspirant des formules de trigonométrie classique, déterminer :
   (a) les formes développées de $\cosh(a-b)$ et $\sinh(a-b)$;
   (b) les formules de duplication donnant $\cosh^2(a)$ et $\sinh^2(a)$ en fonction de $\cosh(2a)$.
4. Étudier complètement ces trois fonctions : domaine de définition, continuité, dérivabilité, dérivée, parité, tableau de variations (avec les valeurs remarquables et les limites aux bornes).

Partie B : les fonctions hyperboliques réciproques

1. (a) Montrer que la fonction cosh est bijective de $[0;\ +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
   (b) Montrer que la fonction sinh est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera.
   (c) Montrer que la fonction tanh est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. On note arccosh, arcsinh, arctanh les fonctions réciproques de ces trois fonctions trigonométriques hyperboliques.
   (a) Préciser les domaines de définition des trois fonctions réciproques.
   (b) Déterminer les expressions simplifiées de $\sinh(\operatorname{arccosh}(x))$ et $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))$. *On précisera le domaine de validité de ces expressions.*
   (c) En déduire les dérivées de arccosh et arcsinh. *On précisera les domaines de dérivabilité de ces fonctions.*
3. (a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :
   $$\sinh(x) = \beta$$
   Indication: On pourra faire le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$
   (b) En déduire, pour tout x de son domaine de définition, l'expression de $\operatorname{arcsinh}(x)$.
   (c) En vous inspirant de ce qui précède, déterminer pour tout x de son domaine de définition, l'expression de $\operatorname{arccosh}(x)$.

Partie C : application à la résolution d'une équation différentielle

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(x^2-1)\,y' + xy = 1 \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle sur $]1;\ +\infty[$.
2. Déterminer également les solutions de cette équation différentielle sur $]-1;\ 1[$.