

---

## Devoir maison du mois de juin 2026

### TSI 1

---

Ce devoir facultatif est à faire en binôme en rédigeant une copie par personne. On pourra traiter autant d'exercices que l'on souhaite.

Les codes Python doivent être regroupés dans un script portant le nom des candidats et déposé sur :

<https://drive.monlycee.net/s/aWRmMQ.kYNYRsL5LgznCkN> avec le mot de passe DM\_202606

### Exercice 1

### Égalité de Taylor-Lagrange

$n$  désigne un entier naturel.

Soit  $f$  une fonction  $(n + 1)$ -fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .

Dans toute la suite, on considère  $(a; b) \in I^2$  tels que  $a \neq b$ .

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence de  $\theta \in ]a; b[$  (ou  $]b; a[$ ) tel que

$$f(b) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \times (b-a)^{n+1}$$

1. On se place dans le cas où  $n = 0$ .

(a) Montrer que, dans ce cas, la formule de Taylor-Lagrange est équivalente à

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\theta)$$

(b) Quel résultat du cours garantit, dans ce cas, l'existence d'un tel nombre  $\theta$  dans  $]a; b[$  (ou  $]b; a[$ ) ?

2. On se place dans le cas général.  $C$  désigne un nombre fixé.

Soit alors  $\varphi$  la fonction

$$\varphi : x \mapsto f(b) - \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \times (b-x)^k - C(b-x)^{n+1}$$

(a) Déterminer la valeur de  $\varphi(b)$ .

(b) Montrer qu'il existe un unique nombre  $C$  tel que  $\varphi(b) = \varphi(a)$ .

*Indication: Pour cela, on pourra préciser la nature de la fonction*

$$C \mapsto f(b) - \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k - C(b-a)^{n+1}.$$

On suppose maintenant qu'on a choisi  $C$  de telle sorte que  $\varphi(b) = \varphi(a)$

(c) En appliquant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe  $\theta \in ]a; b[$  tel que

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

(d) Conclure.

## Exercice 2 : Intégrales de Wallis

Les intégrales de Wallis sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$$

L'objet de cet exercice est d'étudier puis d'exploiter ces intégrales.

- Soient  $a < b$  deux réels. On considère une fonction  $f$  continue sur  $]a; b[$ , deux fois dérivable sur  $]a; b[$  et qui vérifie pour tout  $x \in ]a; b[$ ,  $f''(x) < 0$ .

L'objectif de cette question est de montrer que la courbe de  $f$ , notée  $\mathcal{C}$ , est située au-dessus la corde tendue entre les points d'abscisses  $a$  et  $b$ , notée  $(D)$ .

Pour ce faire, on pose  $\Delta : x \mapsto f(x) - \left( \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right) (x-a) - f(a)$

- Déterminer l'équation de la corde  $(D)$  tendue entre les points d'abscisses  $a$  et  $b$ .
  - Expliquer pourquoi  $\Delta'$  s'annule au moins une fois sur  $]a; b[$ . On notera  $c$  l'un des zéros de  $\Delta'$ .
  - Déterminer le sens de variation de  $\Delta'$ .
  - En déduire le tableau de signes de  $\Delta'$  puis les variations de  $\Delta$ .
  - Finalement, prouver que tout point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x \in ]a; b[$  est situé au dessus du point de  $(D)$  de même abscisse.
- Généralités sur la suite  $(I_n)$ .
    - Justifier que ces intégrales sont bien définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
    - Calculer  $I_0, I_1$  et  $I_2$ .
    - Montrer que, pour tout  $n$ ,  $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$  grâce à un changement de variable.
    - Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et strictement positive. Que peut-on en déduire?
  - Comportement asymptotique de  $(I_n)$ .
    - Montrer que, pour tout  $n$ ,  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .
    - En déduire que  $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$ .
    - Montrer que  $(n+3)I_{n+3}I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}I_n$ , puis que la suite définie pour tout  $n$  par  $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$  est constante. On précisera la valeur de cette constante.
    - Établir finalement cette équivalence :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2n}} \quad (\diamond)$$

- L'objectif de cette question est de prouver le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \quad (\star)$$

- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ , en justifiant brièvement.
- Prouver également que, pour tout  $n$  :

$$I_{2n} = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \qquad I_{2n+1} = I_1 \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \quad (\clubsuit)$$

- (c) Dédurre des deux questions précédentes la limite ( $\star$ ) attendue.  
 (d) À partir des deux égalités ( $\clubsuit$ ), montrer également que, pour tout  $n$  :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \qquad I_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

- (e) Écrire en Python une fonction qui prend en entrée un entier  $n$  et qui renvoie la valeur de  $\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{(4k^2 - 1)}$ .

5. Cette question cherche à établir une formule de Moivre :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \qquad (\text{DM})$$

Avec  $C$  une constante dont on précisera la valeur plus loin.

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par  $\forall n \geq 2$ ,  $u_n = \ln(n^n \sqrt{n} e^{-n}) - \ln(n!)$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}$ .

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer l'aire du trapèze formé par les points de coordonnées  $(n; 0)$ ,  $(n; \ln(n))$ ,  $(n+1; \ln(n+1))$  et  $(n+1; 0)$ .  
 (b) Déterminer également  $\int_n^{n+1} \ln t \, dt$ .  
 (c) Justifier que la fonction logarithme népérien vérifie les hypothèses de la question 1 sur l'intervalle  $[n; n+1]$  puis en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$ .  
 (d) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.  
 (e) En déduire le résultat annoncé.

6. Les questions suivantes permettent de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad (\text{ST})$$

Il s'agit donc de préciser la valeur de la constante  $C = \sqrt{2\pi}$ .

- (a) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$  et que  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$ .  
 (b) En déduire que  $C = \sqrt{2\pi}$ .

7. Les dernières questions permettent de déterminer la valeur de l'intégrale de GAUSS :

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\forall x \in [0; n]$ ,  $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$ .  
 (b) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $e^{-x} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$ .  
 (c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, dt$ .  
 On pourra effectuer le changement de variables  $x = t^2$  dans chacune des intégrales.  
 (d) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt = I_{2n+1} \sqrt{n}$  avec le changement de variable  $t = \sqrt{n} \cos u$ .  
 (e) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, dt \leq I_{2n-2} \sqrt{n}$  avec le changement de variable  $t = \sqrt{n} \tan u$ .  
 (f) Finalement, déterminer la valeur de l'intégrale de GAUSS.

### Exercice 3 : Opérateur de différences finies

Dans toute la suite,  $n$  désignera un entier naturel non nul.

On rappelle que  $\mathbb{R}_n[X]$  correspond à l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On veut étudier  $\Delta$  l'opérateur de différences finies, qui est défini sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta[P](X) = P(X+1) - P(X)$$

On pose  $\Delta^0 = \text{id}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta^k = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}$ .

Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme  $\Delta$  et de certaines de ses applications.

*On ne raisonnera ici que sur des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.*

#### Partie I : Étude de $\Delta$

On définit la famille de polynômes réels  $(P_q)_{q \in \mathbb{N}}$  par  $P_0 = 1$  et pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$  par :

$$P_q[X] = \frac{1}{q!} X(X-1)(X-2) \cdots (X-q+1) = \frac{1}{q!} \prod_{k=0}^{q-1} (X-k)$$

1. (a) Rappeler la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
(b) Montrer que  $(P_q)_{0 \leq q \leq n}$  forme une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Étude de l'endomorphisme  $\Delta$ .
  - (a) Établir que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - (b) Calculer  $\Delta[P_0]$ , puis, pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta[P_{q+1}]$  en fonction de  $P_q$ .
  - (c) On considère un polynôme non nul  $A$  de degré  $d$ .  
Préciser le degré du polynôme  $\Delta[A]$  puis donner  $\Delta^{d+1}[A]$ .
  - (d) Déterminer le noyau de  $\Delta$ .
  - (e) Enfin, déterminer si  $\Delta$  est injectif ou surjectif.
3. Expression d'un polynôme dans la base  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(a) Pour tout  $(q; l) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\Delta^l[P_q]$  et en déduire que  $\Delta^l[P_q](0) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

(b) En déduire que, pour tout polynôme  $A \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a la formule :

$$A(X) = \sum_{k=0}^n \Delta^k[A](0) \times P_k[X]$$

## Partie II : Étude des puissances de l'endomorphisme $\Delta$

1. Établir, par récurrence sur  $p$ , la formule suivante valable pour tout polynôme  $A \in \mathbb{R}[X]$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\Delta^p[A](X) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} A(X+k)$$

2. Application de cette formule au calcul de sommes.
  - (a) Déterminer la dernière coordonnée du polynôme  $X^n$  dans la base  $(P_0; P_1; \dots; P_n)$ .  
En déduire la valeur de  $\Delta^n[X^n]$ , puis établir la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = n!$$

- (b) Démontrer la formule suivante, valable pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0$$

## Partie III : Calcul de la somme des puissances des $p$ premiers entiers

1. Établir la formule suivante pour tout  $Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $R = \Delta[Q]$  :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^p R(k) = Q(p+1) - Q(0)$$

2. Exprimer les polynômes  $X$ ,  $X^2$  et  $X^3$  dans la base  $(P_k)_{0 \leq k \leq 3}$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .  
En déduire des polynômes  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  tels qu'on ait  $\Delta[Q_1](X) = X$ ,  $\Delta[Q_2](X) = X^2$  et  $\Delta[Q_3](X) = X^3$ .
3. Donner alors l'expression factorisée des sommes  $\sum_{k=0}^p k$ ,  $\sum_{k=0}^p k^2$  et  $\sum_{k=0}^p k^3$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ .

## Partie IV : Généralisation

On cherche dans cette partie une suite de polynômes  $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$  tels que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta[B_{p+1}] = X^p$ .

1. Montrer, pour tout polynôme  $A \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\Delta[A]' = \Delta[A']$ .
2. Établir que, si une telle suite de polynômes  $(B_p)$  existe, on a les trois conditions nécessaires :
  - $C_1$  :  $\forall p \geq 1, B'_{p+1} - pB_p \in \text{Ker}(\Delta)$ ;
  - $C_2$  :  $\forall p \geq 1, B_{p+1}(1) = B_{p+1}(0)$ ;
  - $C_3$  : Le polynôme  $B_1$  est unitaire et de degré 1.
3. Réciproquement, établir par récurrence qu'une suite  $(B_p)$  satisfaisant les trois conditions précédentes vérifie

$$\Delta[B_{p+1}] = X^p \text{ et qu'on a alors } \sum_{k=0}^q k^p = B_{p+1}(q+1) - B_{p+1}(0) \text{ pour tout entier naturel } q.$$

On impose maintenant à cette suite de polynômes les conditions :

- $D_1$  :  $\forall p \geq 1, B'_{p+1} = pB_p$ ;
- $D_2$  :  $\forall p \geq 1, B_{p+1}(1) = B_{p+1}(0)$ ;
- $D_3$  : le polynôme  $B_1$  est unitaire et de degré 1.

Notons que ces trois conditions sont plus restrictives que  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

4. Prouver que les conditions  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont équivalentes aux trois conditions suivantes :

$$E_1: \forall p \geq 1, B'_{p+1} = pB_p;$$

$$E_2: \forall p \geq 1, \int_0^1 B_p(t) dt = 0;$$

$E_3$ : le polynôme  $B_1$  est unitaire et de degré 1.

5. Déterminer les polynômes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$  et retrouver ainsi les expressions factorisées de  $\sum_{k=0}^p k$ ,  $\sum_{k=0}^p k^2$  et

$$\sum_{k=0}^p k^3 \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*.$$

6. Établir l'unicité de la suite de polynômes vérifiant les conditions  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .
7. Finalement, écrire en langage Python un algorithme permettant d'obtenir les coefficients, dans la base canonique, des polynômes  $(B_k)_{1 \leq k \leq 10}$ .

On pourra exprimer les coefficients de chacun des  $B_k$  comme une liste de nombres.

## Exercice 4 : Python pour la loi binomiale et les sondages

Toutes les fonctions doivent être écrites en langage Python.

1. Écrire une fonction appelée *factorielle* qui prend en entrée un entier  $n$  et qui renvoie  $n!$ .
2. Écrire une fonction appelée *coefficient* qui prend en entrée deux entiers  $k$  et  $n$  et qui renvoie en sortie le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ .
3. Écrire une fonction appelée *fbinomiale* qui prend en entrée deux entiers  $k$  et  $n$  et un réel  $p$  et qui renvoie en sortie  $P(X = k)$  où  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
4. Écrire une fonction appelée *rbinomiale* qui prend en entrée deux entiers  $k$  et  $n$  et un réel  $p$  et qui renvoie en sortie  $P(X \leq k)$  où  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
5. Écrire une fonction appelée *confiance* qui prend en entrée un réel  $\alpha$ , un entier  $n$  et un réel  $p$  et qui renvoie en sortie deux entiers  $i$  et  $j$  tels que :
  - $P(X \leq i) \leq \frac{\alpha}{2}$  et  $i$  est le plus grand possible;
  - $P(X \geq j) \leq \frac{\alpha}{2}$  et  $j$  est le plus petit possibleoù  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
6. On lance 120 fois de suite un dé et on obtient 30 six. Doit-on rejeter l'hypothèse que le dé soit équilibré? On répondra à l'aide d'arguments quantitatifs, en exploitant les fonctions qui précèdent.

## Exercice 5 : Loi de Hardy-Weinberg

On rappelle qu'un gène d'un individu est codé par deux allèles portées par les deux chromosomes d'une paire donnée. Par exemple, le groupe sanguin d'un individu est donné par une paire d'allèles choisies parmi A, B et O. Les deux allèles portés par un individu s'appellent le *génotype*. Dans le cas des groupes sanguins, il y en a six :  $A - A$ ,  $B - B$ ,  $O - O$ ,  $A - O$ ,  $B - O$ ,  $A - B$ .

Hors cas de mutation, ces allèles proviennent directement du père et de la mère de l'individu par l'intermédiaire des gamètes (spermatozoïdes et ovules). C'est au moment de la production de ces gamètes que les paires de chromosomes sont séparées de manière aléatoire, chaque gamète contenant ainsi un lot de chromosomes simples donc contenant une seule allèle pour chaque gène. Par exemple si un individu est porteur des allèles A et O cela signifie que l'allèle O provient de son père et l'allèle A de sa mère ou bien que l'allèle O provient de sa mère et l'allèle A de son père.

La loi de Hardy-Weinberg précise que, si une allèle est neutre du point de vue sélectif, c'est à dire ne conduit pas à un avantage ou désavantage, alors sa fréquence dans la population reste constante d'une génération sur l'autre et l'on peut même prévoir la fréquence des *génotypes*, c'est à dire la fréquence des individus en fonction des paires d'allèles possibles.

Pour simplifier, on va s'intéresser à un gène codé par uniquement deux allèles A et B. Il y a donc trois génotypes possibles :  $A - A$ ,  $A - B$  et  $B - B$ .

On suppose que la *fréquence allélique* de A est  $p$ , celle de B est  $q$ , avec  $p+q=1$  ; en définissant la fréquence allélique de A comme le nombre d'allèles A *dans la population* divisé par le nombre total d'allèles pour le gène en question, c'est à dire deux fois le nombre total d'individus.

On note également les fréquences  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  d'individus porteurs respectivement des génotypes  $A - A$ ,  $A - B$  et  $B - B$ . Nous supposons ces fréquences identiques entre hommes et femmes.

1. Donner les valeurs de  $p$  et  $q$  en fonction de  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$ .
2. Un couple se rencontre au hasard<sup>1</sup> et conçoit un enfant. On note respectivement  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  les probabilités des évènements :
  - le génotype de l'enfant est de type  $A - A$  ;
  - le génotype de l'enfant est de type  $A - B$  ;
  - le génotype de l'enfant est de type  $B - B$ .
  - (a) Déterminer les valeurs de  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  en fonction de  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$ .
  - (b) En exploitant la question 1, donner les expressions de  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  en fonction de  $p$  et  $q$ .
3. Appliquons cette loi à un exemple. On s'intéresse à la couleur des yeux dans une population en supposant que A correspond à l'allèle des yeux bleus et B celle des yeux marrons. On rappelle que seuls les individus porteurs du génotype  $A - A$  ont les yeux bleus<sup>2</sup>.

On constate que 36% des individus portent les yeux bleus. En déduire les fréquences alléliques de A et B.

---

1. sans préférence pour un génotype donné

2. car l'allèle des yeux bleus est récessif