

Exercice 1 : Puissances d'une matrice

On souhaite étudier la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \\ -6 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie A : Généralités sur A

1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan.
2. Calculer $A^2 - A$. En déduire l'inverse de A par une autre méthode.
3. Soit λ un réel.
 - (a) Résoudre le système $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$. On discutera selon les valeurs de λ .
 - (b) En déduire qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2 telles que les espaces $K_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I_3)$ et $K_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 I_3)$ ne sont pas réduits à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
 - (c) Déterminer des bases respectives \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de K_1 et K_2 .
 - (d) Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de \mathbb{R}^3 . Que peut-on en déduire pour les espaces K_1 et K_2 ?

La suite du problème s'intéresse aux puissances successives de A .

Partie B : Calcul des puissances à l'aide d'un polynôme

On considère le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$ à coefficients réels.

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $P(A) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. On pourra éventuellement s'appuyer sur les résultats de la partie A.
3. Pour tout entier n , déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
4. Déduire de ce qui précède, pour tout entier n , l'expression de A^n .

Partie C : À l'aide d'un changement de base

On reprend les notations et hypothèses de la partie A.

On définit en outre φ l'application canoniquement associée à A et on note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que les restrictions de φ à K_1 et K_2 sont des endomorphismes remarquables dont on précisera les expressions.
2. En déduire la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .

Dans toute la suite, on notera D cette matrice.

3. Déterminer la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} , notée P .
4. Donner, pour tout entier n , l'expression de D^n .
5. Établir la relation permettant d'obtenir A en fonction de D et P .
6. Calculer l'inverse de P .
7. Déduire de tout ce qui précède, pour tout entier n , l'expression de A^n .

Exercice 2 : Suites, matrices et probabilités

La partie C est indépendante des autres.

Partie A : Étude des suites définies par une récurrence d'ordre deux

Soient a et b deux nombres réels avec $b \neq 0$.

On note $\mathcal{D} = \{\text{suites } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

1. Montrer que \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel des suites.
2. Montrer qu'une suite géométrique non triviale appartient à \mathcal{D} si et seulement si sa raison r vérifie :

$$r^2 - ar - b = 0 \quad (E)$$

3. (a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n) &\mapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) On suppose que l'équation (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 toutes non nulles.

Montrer que les deux suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de \mathcal{D} .

4. Étude d'un cas particulier : la suite de Fibonacci.

On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout entier n , $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On est donc dans le cas où $a = b = 1$.

- (a) Résoudre l'équation (E) dans ce cas.
- (b) En exploitant ce qui précède, déterminer la formule explicite pour la suite (F_n) .
- (c) Donner un équivalent « simple » de (F_n) en $+\infty$.

Partie B : La ruine de Salim

Salim l'écureuil arrive au casino avec une fortune $n \in \mathbb{N}^*$ en noisettes. Il s'installe à une table et commence à jouer. À chaque partie il mise une noisette et :

- il gagne une noisette supplémentaire avec une probabilité $p \in]0; 1[$;
- il perd la noisette mise avec une probabilité $1 - p$.

Lorsque sa fortune est nulle, il quitte le casino. Et si sa fortune atteint son objectif $t \geq n$, il s'arrête.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes, et que l'objectif t est fixé.

On souhaite déterminer, en fonction de n , p et t , la probabilité qu'il atteigne effectivement son objectif. On note u_n cette probabilité.

1. Par lecture de l'énoncé, donner les valeurs de u_0 et u_t .
2. En analysant la première partie jouée, au moyen de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \llbracket 1; t-1 \rrbracket$, $u_n = (1-p)u_{n-1} + pu_{n+1}$.
3. On souhaite maintenant déterminer la formule explicite de (u_n) .

On se place dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$.

- (a) En exploitant les résultats de la partie A, montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels :

$$\forall n \in \llbracket 0; t \rrbracket, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} \\ r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} \end{cases}$$

- (b) Déterminer, en fonction de t , r_1 , et r_2 , les valeurs de λ et μ .

Partie C : Un cas particulier de la ruine de Salim

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
(b) Déterminer par le calcul A^2 , A^3 et A^4 .
(c) Conjecturer puis prouver par récurrence, pour tout entier n , la formule de A^n .
2. Soit $t \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_t = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$.

Pour ce faire, on pose, pour tout entier n , $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier n , $X_{n+1} = AX_n$.
- (b) En déduire par récurrence que, pour tout n , $X_n = A^n X_0$.
- (c) En exploitant ce qui précède, déterminer la formule explicite de (u_n) .

Exercice 3 : Calcul de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Les parties B et C s'appuient sur la partie A mais sont indépendantes entre elles.

Dans toute la suite, on fixe n un entier naturel non nul.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on désignera également par P la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$.

Enfin, dans toute la suite, $(a; b)$ seront des réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a; b]$.

Partie A : Résultats préliminaires

1. Donner la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Préciser la dimension de ce \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Soit g une fonction affine telle que $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.
 - (a) Montrer que g est définie de manière unique. Préciser, pour tout réel x , l'expression de $g(x)$ en fonction de a , b et f .
 - (b) Déterminer, en fonction de a , b et f la valeur de

$$\int_a^b g$$

3. Soit $t \in]a; b[$. Soit une fonction h deux fois dérivable sur $[a; b]$ et telle que $h(a) = h(t) = h(b)$.
Montrer que h'' s'annule au moins une fois sur $]a; b[$.

Partie B : Contrôle de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Dans cette partie, g demeure la fonction affine définie dans la partie A.

L'objectif est de contrôler l'erreur commise en approximant $\int_a^b f$ par $\int_a^b g$. On cherche ainsi à majorer

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b g \right| = \left| \int_a^b (f - g) \right|$$

On pose ainsi $\delta : x \mapsto f(x) - g(x)$ la fonction de différence entre f et g , définie sur $[a; b]$

1. Déterminer $\delta(a)$ et $\delta(b)$.
2. Expliquer pourquoi δ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a; b]$ puis calculer, pour tout x de $[a; b]$ l'expression de $\delta''(x)$.
3. Soit $t \in]a; b[$ fixé. On pose $\Delta : x \mapsto \delta(x) - \delta(t) \frac{(x-a)(x-b)}{(t-a)(t-b)}$.
 - (a) Déterminer $\Delta(a)$, $\Delta(b)$, $\Delta(t)$.
 - (b) En exploitant l'un des résultats de la partie A, en déduire qu'il existe $\alpha \in]a; b[$ tel que

$$f''(\alpha) = \frac{2\delta(t)}{(t-a)(t-b)}$$

4. Expliquer pourquoi la fonction $|f''|$ possède un maximum sur $[a; b]$.
Dans toute la suite on note $M = \max_{[a; b]} |f''|$ ce maximum.
5. (a) En exploitant ce qui précède, montrer que, pour tout $t \in]a; b[$,

$$|\delta(t)| \leq \frac{M}{2}(t-a)(b-t)$$

- (b) En déduire un majorant de $\left| \int_a^b (f - g) \right|$ en fonction de a , b et M .