Devoir maison du 10 mai 2021
TSI 1

Ce devoir est à faire en binôme en rédigeant un compte-rendu par personne.

Les scripts `Python` portant vos noms de famille devront être déposés sur cette adresse :
https://herissonceleste.hopto.org/nextcloud/index.php/s/TKnMQ2j2iBGMMZB

Exercice 1 — Comme un pétard mouillé

On dispose de n pétards qui sont restés un moment dans une cave humide. Le soir du 13 juillet, on essaie de tous les allumer. Chacun éclate, indépendamment des autres avec probabilité $p \in]0;\ 1[$.
On note X le nombre de ceux qui ont éclaté. On récupère ceux qui n'ont pas éclaté. On les laisse sécher une journée et on ajoute une nouvelle mèche. Le soir du 14 juillet, on tente à nouveau de les allumer. Chacun des pétards éclate alors indépendamment des autres avec probabilité $q \in]0, 1[$. On note Y le nombre de pétards qui ont éclaté soit le 13 soit le 14 juillet.

1. Quelle est la loi de X ? *Justifier soigneusement.*
2. Calculer $P(Y = k | X = l)$ pour $l \leq k \leq n$.
3. (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Peut-on retrouver ce résultat en considérant le nombre de pétards qui n'ont pas éclaté ?

Exercice 2 — Matrices

Partie A : Matrices de transformations géométriques

Dans toute cette partie, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On considère f l'homothétie de centre O et de rapport λ.
   (a) Soit un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées de M', l'image de M par f.
   (b) En déduire que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui, aux coordonnées d'un point M, associe les coordonnées de son image par f, peut canoniquement être associée à une matrice F que l'on précisera.
2. Soit $\theta \in]-\pi;\ \pi]$. On considère r la rotation de centre O et d'angle θ.
   (a) Soit un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées de M', l'image de M par r.
   (b) En déduire que l'application $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui, aux coordonnées d'un point M, associe les coordonnées de son image par r, peut canoniquement être associée à une matrice R que l'on précisera.

Partie B : Étude des matrices qui commutent

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Pour tout $(i\ \ j) \in [\![1;\ n]\!]^2$, on pose E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient situé en i-ème ligne et en j-ème colonne qui vaut 1.

On peut aborder la question 3 sans avoir traité les précédentes.

1. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Soit $(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]^2$
   (a) Décrire la matrice $E_{ij}B$.
   (b) Décrire la matrice BE_{ij}.
   (c) À quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficient de B a-t-on $BE_{ij} = E_{ij}B$?
2. (a) En déduire l'ensemble des matrices B qui vérifient
   « Pour tout $(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]^2$, $BE_{ij} = E_{ij}B$. »

   On note $\mathrm{Z}_n(\mathbb{R})$ cet ensemble.
   (b) Montrer que :
   $$\forall H \in \mathrm{Z}_n(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ AH = HA$$

   On suppose pour cette question que $n = 3$.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Soit la matrice N telle que $A = I_3 + N$.
   (a) Donner la matrice N.
   (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k. *On pourra calculer les premières puissances de N.*
   (c) En remarquant que I_3 et N commutent, déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'expression de A^p.

Partie C : Python pour les matrices

On définit en Python une matrice comme étant une liste de listes. Par exemple :

- l'instruction `A = [[1,2],[3,4]]` correspond à la création de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- l'instruction $A[0][1] = -2$ remplace le coefficient en première ligne et seconde colonne par -2.

> Pour fabriquer les scripts, il est interdit d'exploiter le module `numpy` ou tout autre module d'algèbre linéaire. En revanche, on pourra vérifier la cohérence des résultats grâce à ces modules.

Algorithme n^o^ 1: Fabriquer ces deux fonctions :
- `zero` qui prend en argument deux entiers n et p et qui renvoie la matrice nulle de taille $n \times p$;
- `identite` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la matrice identité de taille $n \times n$.

Algorithme n^o^ 2: Fabriquer une fonction `somme` qui prend en argument deux matrices A et B et qui renvoie $A + B$ lorsque la somme est possible.

Algorithme n^o^ 3: Fabriquer une fonction `produit` qui prend en argument deux matrices A et B et qui renvoie $A \times B$ lorsque la multiplication est possible.

Algorithme n^o^ 4: Fabriquer une fonction `puissance` qui prend en argument une matrice A et un entier n et qui renvoie A^n lorsque ce calcul est possible.

Ce dernier algorithme est *facultatif.*

Algorithme n^o^ 5: Fabriquer une fonction `inverse` qui prend en argument une matrice A et qui renvoie A^{-1} lorsque ce calcul est possible.