Devoir maison du 5 janvier 2026
TSI 1

Ce devoir est à faire en binôme en rédigeant une copie par personne.

Exercice 1 — Dénombrement

La justification des réponses occupe une grande part dans la notation de cet exercice.

1. n désigne un entier naturel non nul. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]^2 \,/\, i \neq j\right\} \qquad E_2 = \left\{(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]^2 \,/\, i < j\right\}$$
$$E_3 = \left\{(i;\ j) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, |i| \leq n \text{ et } \left|j\right| \leq n\right\} \qquad E_4 = \left\{(i;\ j) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, |i| = \left|j\right| \text{ et } |i| \leq n\right\}$$

> **Solution:** Pour E_1 :
>
> Il y a n manières de choisir i et $n-1$ manières de choisir j donc $\#E_1 = n(n-1)$.
>
> Pour E_2 :
>
> Parmi les couples de E_1, il y a autant de couples où $i < j$ que de couples où $i > j$ donc $\#E_2 = \frac{\#E_1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
>
> Pour E_3 :
>
> $E_4 = [\![-n;\ n]\!] \times [\![-n;\ n]\!]$ donc $\#E_5 = (2n+1)^2$.
>
> Pour E_4 :
>
> On sait que $i \in [\![-n;\ n]\!]$. Pour tout i non nul de cet ensemble, il y a deux manières de choisir j et pour $i = 0$, il n'y a qu'une manière de choisir j donc $\#E_6 = 4n+1$.
>
> > On pouvait aussi résoudre cet exercice en représentant les ensembles de points dans un plan avec un axe pour i et l'autre axe pour j.
> > Par exemple, les points de E_4 forment alors une croix avec quatre branches de cardinal n et le centre.

2. Sur ses trois premiers devoirs, notés sur vingt, et tous pondérés de manière identique, un étudiant a exactement dix de moyenne.

   Combien de notations différentes peuvent conduire à ce résultat ?

   On donnera le résultat exact en supposant que les notes sont des entiers compris entre zéro et vingt.

> **Solution:** Notons $(i,\ j,\ k) \in [\![0;\ 20]\!]^3$ les trois notes. On sait que $i + j + k = 30$ car la moyenne est de 10.
> Raisonnons sur la première note i :
> - Pour $i = 0$, j peut prendre toutes les valeurs entre 10 et 20 donc il y a 11 possibilités pour j et k ;
> - et ainsi de suite jusqu'à $i = 10$ où j peut prendre 21 valeurs différentes ;
> - à partir de $i = 11$, le nombre de valeurs que peut prendre j décroît.

On a donc en tout $11+12+\cdots+20+21+20+\cdots+11 = 21+2\times\sum_{k=11}^{20} k = 21+2\times 10\times\left(\frac{20+11}{2}\right) = 21+10\times 31 =$ 331 possibilités.

3. Au sein de cette classe qui compte trente-deux étudiants, de combien de manières peut-on créer dix groupes de colles numérotés de un à dix comportant trois étudiants et un groupe de colles numéro onze comportant deux étudiants ?

   On répondra avec une formule la plus simple possible.

Solution: Pour constituer le groupe nº 1, on a $\binom{32}{3}$ possibilités.
Une fois constitué le groupe nº 1, on constitue le groupe nº 2, ce qui laisse $\binom{29}{3}$ possibilités.
Et ainsi de suite jusqu'à la constitution de groupe nº 11 qui consiste à choisir deux étudiants parmi les deux restants : $\binom{2}{2}$ possibilités.

Finalement, le nombre de possibilités est :

$$\binom{32}{3}\times\binom{29}{3}\times\cdots\times\binom{5}{3}\times\binom{2}{2} = \frac{32\times 31\times 30}{3!}\times\frac{29\times 28\times 27}{3!}\times\cdots\times\frac{5\times 4\times 3}{3!}\times\frac{2\times 1}{2!} = \frac{32!}{2\times 6^{10}}$$

Exercice 2 — Géométrie de l'espace, plan complexe

Les questions sont à peu près indépendantes. Sauf indication contraire, dans toute la suite, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.

1. **Distance entre un point et un plan.** Soient $(a;\ b;\ c;\ d)\in\mathbb{R}^4$ des nombres tels que $(a;\ b;\ c)\neq(0;\ 0;\ 0)$ et soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation :

$$ax+by+cz=d$$

   Enfin, $A\begin{pmatrix}x_a\\ y_a\\ z_a\end{pmatrix}$ désigne un point et A' désigne le projeté orthogonal de A dans le plan $\mathscr{P}$.

   (a) Déterminer une équation paramétrique de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ qui contient A, en fonction de $(a;\ b;\ c;\ x_a;\ y_a;\ z_a)$.

Solution: Cette droite a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$. Elle a donc pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_a + ta \\ y = y_a + tb \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = z_a + tc \end{cases}$$

(b) En déduire les coordonnées de A', en fonction de $(a;\ b;\ c;\ d;\ x_a;\ y_a;\ z_a)$, puis celles du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et enfin la distance AA'.

Solution: A' est sur la droite dont on a établi l'équation à la question précédente. Il est aussi dans le plan. Ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x = x_a + ta \\ y = y_a + tb \\ z = z_a + tc \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

On trouve t en substituant x, y et z dans la dernière équation :

$$\begin{aligned} a(x_a + ta) + b(y_a + tb) + c(z_a + tc) = d &\iff t(a^2 + b^2 + c^2) = d - ax_a - by_a - cz_a \\ &\iff t = \frac{d - (ax_a + by_a + cz_a)}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ car } a^2 + b^2 + c^2 > 0 \text{ (nombres non tous nuls)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A' \begin{pmatrix} x_a + ta \\ y_a + tb \\ z_a + tc \end{pmatrix} \text{ avec } t = \frac{d - (ax_a + by_a + cz_a)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On en déduit $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ avec $t = \dfrac{d - (ax_a + by_a + cz_a)}{a^2 + b^2 + c^2}$. Et ainsi :

$$AA' = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\left|d - (ax_a + by_a + cz_a)\right|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\left|d - (ax_a + by_a + cz_a)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

C'est la distance entre A et le plan.

2. **Sphère tangente.** Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre O et de rayon 1. m est un nombre et $\mathscr{P}_m$ est le plan d'équation

$$x + y + z = m$$

Déterminer les éventuelles valeurs de m pour lesquelles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}_m$ sont tangents.

Solution: Le plan est tangent à la sphère lorsque la distance entre le plan et le centre de la sphère vaut le rayon de la sphère.

On applique la formule établie à la question précédente avec $a = b = c = 1$ et $x_a = y_a = z_a = 0$ et $d = m$. La distance entre $\mathscr{P}_m$ et le centre de la sphère est donc $\frac{|m|}{\sqrt{3}}$ et cette distance est égale au rayon lorsque $|m| = \sqrt{3}$, c'est à dire pour $m = \sqrt{3}$ ou $m = -\sqrt{3}$.

3. **Lieux.** On se place dans le plan complexe. Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_a et z_b.

Quels lieux forment les images des ensembles suivants :

$$E_a = \{(1-\lambda)z_a + \lambda z_b,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad E_b = \left\{z_a + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in [0;\ \pi[\right\} \qquad E_c = \left\{z \in \mathbb{C} /\ (z - z_a)\left(\overline{z} - \overline{z_b}\right) = 0\right\}$$

Solution: Soit z un complexe quelconque dont l'image dans le plan complexe est M.

Examinons $\mathbf{E_a}$:

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} z \in E_a &\iff \exists \lambda /\ z = (1-\lambda)z_a + \lambda z_b \iff \exists \lambda /\ z - z_a = \lambda(z_b - z_a) \\ &\iff \exists \lambda /\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ &\iff M \in (AB) \end{aligned}$$

E_a forme donc la droite (AB).

Examinons $\mathbf{E_b}$:

Par équivalences :

$$\begin{aligned} z \in E_b &\iff \exists \theta \in [0;\ \pi[/\ z = z_a + 2e^{i\theta} \iff \exists \theta \in [0;\ \pi[/\ z - z_a = 2e^{i\theta} \\ &\iff \exists \theta \in [0;\ \pi[/\ |z - z_a| = 2 \text{ et } \arg(z - z_a) = \theta \end{aligned}$$

En notant $\left(O;\ \vec{e};\ \vec{f}\right)$ le repère du plan complexe, cette dernière condition s'écrit :

$$AM = 2 \qquad \text{et } \left(\vec{e};\ \overrightarrow{AM}\right) \in [0;\ \pi[$$

E_b forme donc un demi-cercle de centre A et de rayon 2.

Examinons $\mathbf{E_c}$:

On a :

$$z \in E_c \iff (z - z_a)\overline{(z - z_b)} = 0 \iff z = z_a \text{ ou } z = z_b$$

Le lieu E_c est donc limité aux points A et B.

Exercice 3 — Trigonométrie hyperbolique

Soient les fonctions $\cosh : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\tanh : x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Partie A : quelques propriétés des fonctions hyperboliques

1. Étude de cosh et sinh.
   (a) Préciser les domaines de définition et de dérivabilité de ces deux fonctions, étudier leurs parités.

Solution: Ces fonctions sont toutes les deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ car exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On remarque également que pour tout x, $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$ et
$\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$. Ainsi, cosh est paire et sinh est impaire.

   (b) Étudier les signes de sinh et de cosh.

Solution: On résout $\sinh(x) > 0$ pour déterminer le signe de sinh. Ainsi, pour tout x :

$$\sinh(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} > 0 \iff \frac{e^{2x}-1}{\mathrm{e}^x} > 0$$

Or $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0 \iff 2x > 0 \iff x > 0$. Ainsi $\sinh(x)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.
Concernant cosh, il est positif car, pour tout x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$.

(c) Calculer les dérivées de ces deux fonctions, puis en déduire les tableaux de variations, avec les limites.

Solution: On a pour tout x, $\cosh'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \cosh(x)$.
On en déduit, à partir des signes de sinh et cosh, que sinh est strictement croissante, et que cosh est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, $\cosh(0) = 1$ et $\sinh(0) = 0$.
Restent à déterminer les limites en $+\infty$ (les limites en $-\infty$ se déduisent par parité).
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \sinh = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \cosh = +\infty$.
Finalement, on peut tracer les tableaux de variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cosh'(x) = \sinh(x)$		$-$	0	$+$	
$\cosh(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sinh'(x) = \cosh(x)$			$+$		
$\sinh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. a et b désignent deux nombres. Prouver les égalités suivantes :

(a)
$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

Solution: Cela s'obtient par le calcul.
En effet, pour tout a, $\cosh^2(a) = \dfrac{e^{2a} + \mathrm{e}^{-2a} + 2\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-a}}{4} = \dfrac{e^{2a} + \mathrm{e}^{-2a} + 2}{4}$ et $\sinh^2(a) = \dfrac{e^{2a} + \mathrm{e}^{-2a} - 2}{4}$
Ainsi, on obtient bien pour tout a, $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = \dfrac{2-(-2)}{4} = 1$

(b)

$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$$

Solution: On calcule le second membre de l'égalité. Pour tout $(a;\ b)$:

$$\begin{aligned}\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b) &= \frac{e^{a+b}+e^{-(a+b)}+e^{a-b}+e^{b-a}}{4}+\frac{e^{a+b}+e^{-(a+b)}-e^{a-b}-e^{b-a}}{4}\\ &= \frac{2e^{a+b}+2e^{-(a+b)}}{4}=\frac{e^{a+b}+e^{-(a+b)}}{2}\\ &= \cosh(a+b)\end{aligned}$$

(c)

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$$

Solution: Cela s'obtient par le même genre de calcul que précédemment. En effet, pour tout $(a;\ b)$:

$$\begin{aligned}\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\sinh(b) &= \frac{e^{a+b}-e^{-(a+b)}+e^{a-b}-e^{b-a}}{4}+\frac{e^{a+b}-e^{-(a+b)}-e^{a-b}+e^{b-a}}{4}\\ &= \frac{2e^{a+b}-2e^{-(a+b)}}{4}=\frac{e^{a+b}-e^{-(a+b)}}{2}\\ &= \sinh(a+b)\end{aligned}$$

3. En exploitant la parité des fonctions, les trois formules établies précédemment, et en s'inspirant des formules de trigonométrie classique, déterminer :
   (a) les formes développées de $\cosh(a-b)$ et $\sinh(a-b)$;

Solution: On obtient les formules en remarquant que, pour tout $(a;\ b)$, $\cosh(a-b) = \cosh(a+(-b))$ et $\sinh(a-b) = \sinh(a+(-b))$. Ainsi :

$$\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(-b)+\sinh(a)\sinh(-b) = \cosh(a)\cosh(b)-\sinh(a)\sinh(b)$$

et

$$\sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(-b)+\cosh(a)\sinh(-b) = \sinh(a)\cosh(b)-\cosh(a)\sinh(b)$$

En effet, cosh est paire et sinh est impaire.

   (b) les formules de duplication donnant $\cosh^2(a)$ et $\sinh^2(a)$ en fonction de $\cosh(2a)$.

Solution: On a, pour tout a :

$$\cosh(2a) = \cosh(a+a) = \cosh^2(a)+\sinh^2(a)$$

Or, $\cosh^2(a)-\sinh^2(a) = 1$, c'est à dire $\sinh^2(a) = \cosh^2(a)-1$ et $\cosh^2(a) = 1+\sinh^2(a)$. Ainsi :

$$\cosh(2a) = \cosh^2(a)+\sinh^2(a) = 2\cosh^2(a)-1 = 2\sinh^2(a)+1$$

On en déduit les deux formules de duplication :

$$\sinh^2(a) = \frac{\cosh(2a)-1}{2} \qquad \cosh^2(a) = \frac{\cosh(2a)+1}{2}$$

4. Étudier complètement la fonction tanh : domaine de définition, dérivabilité, dérivée, parité, tableau de variations (avec les valeurs remarquables et les limites aux bornes).

Solution: Dans l'expression $\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, le dénominateur ne s'annule jamais. Ainsi, tanh est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a vu que sinh est impaire, cosh sont paire et donc, pour tout x

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

Ainsi, tanh est impaire.
On a, en exploitant ce qui précède, pour tout x :

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Sa dérivée étant strictement positive, tanh est strictement croissante
La limite de tanh en $+\infty$ est a priori indéterminée. On utilise les techniques de levée d'indétermination. Ainsi, pour tout x :

$$\tanh(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x\left(1 - e^{-2x}\right)}{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

On en déduit, par quotient de limites que $\lim\limits_{+\infty} \tanh = 1$.
Finalement, on peut dresser le tableau de variations de tanh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$			$+$		
$\tanh(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Partie B : les fonctions hyperboliques réciproques

1. (a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$\sinh(x) = \beta$$

Indication: On pourra faire le changement de variable $X = e^x$

Solution: On pose $X = e^x$. Notons que $X > 0$.
Résoudre $\sinh(x) = \beta$ donne l'équation équivalente suivante sur X :

$$\frac{X - \frac{1}{X}}{2} = \beta \iff X - \frac{1}{X} = 2\beta \iff X^2 - 2\beta X - 1 = 0$$

En théorie, après calcul, on obtient deux solutions pour X :

$$\begin{cases} X_1 = \beta + \sqrt{\beta^2+1} \\ X_2 = \beta - \sqrt{\beta^2+1} \end{cases} \quad \text{sachant que } \Delta = \sqrt{4\beta^2+4} > 0$$

Mais, il est clair que l'on doit écarter la seconde racine car elle est négative.
On obtient donc finalement $x = \ln(X_1) = \ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right)$

(b) Pour tout $\alpha \in [1;\ +\infty[$, déterminer l'unique solution positive de l'équation

$$\cosh(x) = \alpha$$

Solution: On résout pour $\alpha \geq 1$, l'équation $\cosh(x) = \alpha$
Avec des calculs similaires, on obtient, en posant $X = \mathrm{e}^x$, l'équation équivalente sur X.

$$X^2 - 2\alpha X + 1 = 0$$

Cette équation possède deux racines :

$$\begin{cases} X_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \\ X_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2-1} \end{cases} \quad \text{sachant que } \Delta = \sqrt{4\alpha^2-4} \geq 0 \text{ car } \alpha \geq 1$$

Pour tout $\alpha \geq 1$, on a $X_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1} \geq 1$ et donc $\ln(X_1) \geq 0$.
En revanche, on a, par la technique du conjugué :

$$X_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right)\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)}{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{1}{X_1} \leq 1$$

Pour $\alpha > 1$, cela donne donc $\ln(X_2) < 0$. Finalement, seul $\ln(X_1)$ convient.

On obtient ainsi l'unique solution positive $x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

2. Les deux questions précédentes nous montrent que sinh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que cosh est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[1;\ +\infty[$. On note arcsinh et arccosh leurs deux fonctions réciproques.

(a) Déterminer les expressions simplifiées de $\sinh(\operatorname{arccosh}(x))$ et $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))$. *On précisera le domaine de validité de ces expressions.*

Solution: Cette expression existe pour $x \in [1;\ +\infty[$ et pour tout x de ce domaine, $\operatorname{arccosh}(x)$ est positif et donc $\sinh(\operatorname{arccosh}(x))$ est également positif.
Posons $u = \operatorname{arccosh}(x)$. On a donc $\cosh(u) = x$. Or $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$ et ainsi $\sinh^2(u) = \cosh^2(u) - 1$. Cette dernière expression est positive car cosh prend ses valeurs dans $[1;\ +\infty[$.
On en déduit que $\sinh(u) = \sinh(\operatorname{arccosh}(x)) = \sqrt{\cosh^2(u)-1} = \sqrt{x^2-1}$
Par un raisonnement similaire, on obtient $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$

(b) En déduire les dérivées de arccosh et arcsinh. *On précisera les domaines de dérivabilité de ces fonctions.*

Solution: On utilise la formule de dérivation d'une fonction réciproque. Sachant que la dérivée de cosh s'annule en 0, arccosh est dérivable sur $]1;\ +\infty[$. La formule de dérivation donne, pour tout x de ce domaine :

$$\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arccosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

De même, on en déduit que arcsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la dérivée de sinh ne s'annule jamais. De plus, pour tout réel x :

$$\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$