Lycée Richelieu
Rueil-Malmaison

Concours Blanc Final de TSI1
Épreuve de Mathématiques

Durée : 4h, calculatrice interdite

Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.

On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.

Problème — 10 points

Les parties B et C s'appuient sur la partie A mais sont indépendantes entre elles.

Dans toute la suite, on fixe n un entier naturel non nul.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on désignera également par P la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$.

Enfin, dans toute la suite, $(a;\ b)$ seront des réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a;\ b]$.

Partie A : Résultats préliminaires — 2 points

1. Donner la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Préciser la dimension de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Solution: Voir le cours. La dimension est $n+1$.

2. Soit g une fonction affine telle que $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

   (a) Montrer que g est définie de manière unique. Préciser, pour tout réel x, l'expression de $g(x)$ en fonction de a, b et f.

   Solution: Soient m et p le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de g. m et p vérifient :

   $$\begin{cases} f(a) = ma + p \\ f(b) = mb + p \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ p = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times a \end{cases}$$

   Ainsi, g est définie de manière unique, pour tout x par :

   $$g(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) + f(a)$$

   (b) Déterminer, en fonction de de a, b et f la valeur de

   $$\int_a^b g$$

   Solution: Il est facile de calculer l'intégrale d'une fonction affine. Que ce soit par du calcul de primitive ou des considérations graphiques sur le trapèze, on obtient :

   $$\int_a^b g = (b-a) \times \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

3. Soit $t \in]a;\ b[$. Soit une fonction h deux fois dérivable sur $[a;\ b]$ et telle que $h(a) = h(t) = h(b)$.
   Montrer que h'' s'annule au moins une fois sur $]a;\ b[$.

Solution: h est dérivable. On peut donc appliquer le théorème de Rolle deux fois : une fois sur $]a;\ t[$ et une fois sur $]t;\ b[$.
Ainsi, il existe $(\theta_1;\ \theta_2) \in]a;\ t[\times]t;\ b[$ tels que $h'(\theta_1) = h'(\theta_2) = 0$.
Mais h' est dérivable sur $]\theta_1;\ \theta_2[\subset [a;\ b]$.
On applique encore une fois le théorème de Rolle et on en déduit qu'il existe $\theta \in]\theta_1;\ \theta_2[$ tel que $h''(\theta) = 0$.

Partie B : Contrôle de l'erreur dans la méthode des trapèzes **4 points**

Dans cette partie, g demeure la fonction affine définie dans la partie A.

L'objectif est de contrôler l'erreur commise en approximant $\int_a^b f$ par $\int_a^b g$. On cherche ainsi à majorer

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b g\right| = \left|\int_a^b (f-g)\right|$$

On pose ainsi $\delta : x \mapsto f(x) - g(x)$ la fonction de différence entre f et g, définie sur $[a;\ b]$

1. Déterminer $\delta(a)$ et $\delta(b)$.

   Solution: Par construction de g et de δ, $\delta(a) = \delta(b) = 0$.

2. Expliquer pourquoi δ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a;\ b]$ puis calculer, pour tout x de $[a;\ b]$ l'expression de $\delta''(x)$.

   Solution: δ est de classe $\mathscr{C}^2$ par différence de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. En effet, une fonction affine est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   De plus, $\delta''(x) = f''(x) - g''(x) = f''(x)$.

3. Soit $t \in]a;\ b[$ fixé. On pose $\Delta : x \mapsto \delta(x) - \delta(t)\dfrac{(x-a)(x-b)}{(t-a)(t-b)}$.

   (a) Déterminer $\Delta(a)$, $\Delta(b)$, $\Delta(t)$.

   Solution: Un petit calcul montre que $\Delta(a) = \Delta(b) = \Delta(t) = 0$.

   (b) En exploitant l'un des résultats de la partie A, en déduire qu'il existe $\alpha \in]a;\ b[$ tel que

   $$f''(\alpha) = \frac{2\delta(t)}{(t-a)(t-b)}$$

   Solution: On exploite, comme suggéré la partie A puisque Δ vérifie les hypothèses de la fonction h de la question A.3. Il existe donc $\alpha \in]a;\ b[$ tel que $\Delta''(\alpha) = 0$.
   On calcule, pour tout x de $[a;\ b]$, $\Delta''(x) = \delta''(x) - \dfrac{2\delta(t)}{(t-a)(t-b)}$.
   En effet, un petit calcul montre que la dérivée seconde de $x \mapsto \delta(t)\dfrac{(x-a)(x-b)}{(t-a)(t-b)}$ est constante et vaut $\dfrac{2\delta(t)}{(t-a)(t-b)}$ (il s'agit en effet d'un polynôme du second degré en x).

Finalement, on en déduit que α vérifie :

$$\Delta''(\alpha) = 0 \iff f''(\alpha) - \frac{1}{2(t-a)(t-b)} = 0 \iff f''(\alpha) = \frac{2\delta(t)}{(t-a)(t-b)}$$

4. Expliquer pourquoi la fonction $\left|f''\right|$ possède un maximum sur $[a;\ b]$.

Solution: f'' est continue car f est de classe $\mathscr{C}^2$. Par composition, on en déduit que $\left|f''\right|$ est continue. Or l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Donc, sur $[a;\ b]$, $\left|f''\right|$ possède un maximum.

Dans toute la suite on note $M = \max_{[a;\ b]} \left|f''\right|$ ce maximum.

5. (a) En exploitant ce qui précède, montrer que, pour tout $t \in]a;\ b[$,

$$|\delta(t)| \leq \frac{M}{2}(t-a)(b-t)$$

Solution: En exploitant la question B.3.b, on obtient :

$$\delta(t) = \frac{f''(\alpha)}{2}(t-a)(t-b)$$

En prenant la valeur absolue, cela donne :

$$|\delta(t)| = \left|\frac{f''(\alpha)}{2}(t-a)(t-b)\right| = \frac{\left|f''(\alpha)\right| \times |t-a| \times |t-b|}{2}$$

Or, $\left|f''(\alpha)\right| \leq M$ et $|t-a| = t-a$ et $|t-b| = b-t$ (car $b > t$). Finalement, on a bien :

$$|\delta(t)| \leq \frac{M}{2}(t-a)(b-t)$$

(b) En déduire un majorant de $\left|\int_a^b (f-g)\right|$ en fonction de a, b et M.

Solution: Par l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\left|\int_a^b (f-g)\right| \leq \int_a^b |\delta| \leq \frac{M}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\,\mathrm{d}t$$

On peut moyennant quelques lignes d'efforts calculer

$$\int_a^b (t-a)(b-t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{6}$$

On obtient donc :

$$\left|\int_a^b (f-g)\right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3$$

Partie C : Une famille de polynômes bien sympathique **4 points**

On considère une famille de $n+1$ nombres réels notés $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que $a_0 = a$, $a_n = b$ et pour tout $i \in [\![0;\ n-1]\!]$, $a_i < a_{i+1}$, ce que l'on peut écrire

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

1. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \cdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Montrer que θ est linéaire.

> **Solution:** Soient $(P;\ Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, soient $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$.
> Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a :
> $$(\lambda P + \mu Q)(a_i) = \lambda P(a_i) + \mu Q(a_i)$$
> Ainsi, on a bien :
> $$\theta\left(\lambda P + \mu Q\right) = \lambda\theta(P) + \mu\theta(Q)$$
> L'application θ est donc bien linéaire.

   (b) En examinant le noyau de θ, montrer que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

> **Solution:** Déterminons le noyau de θ :
> $$\text{Ker}(\theta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] /\ \forall 0 \leq i \leq n,\ P(a_i) = 0\}$$
> Un polynôme du noyau est donc de degré au plus n et possède au moins $n+1$ racines distinctes. C'est le polynôme nul.
> θ est injective d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de même dimension. Elle ainsi bijective.

2. Pour tout $0 \leq j \leq n$, on définit le polynôme L_j par

$$L_j[X] = \frac{\prod\limits_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\neq j}} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\neq j}} (a_j - a_k)}$$

   (a) Montrer que, pour tout $0 \leq j \leq n$, L_j appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

> **Solution:** Cela correspond à l'exercice 17 de la planche sur les polynômes.
> Le numérateur de L_j est de degré n car c'est un produit de n polynômes de degré 1. Quant au dénominateur, il est constant.
> Ainsi, L_j est de degré n.

   (b) Déterminer, pour tout $(i;\ j) \in [\![0;\ n]\!]^2$, la valeur de $L_j(a_i)$.

Solution: Si $i \neq j$, $L_j(a_i)$ est nul car l'un des facteurs du numérateur est nul.
Si $i = j$, $L_j(a_j) = 1$. En effet, le numérateur et le dénominateur sont alors égaux.
Finalement $L_j(a_i) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), c'est à dire :

$$L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(c) En déduire que la famille des $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ est libre.

Solution: Soit $(\lambda_j)_{0\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{0\leq i\leq n} \lambda_j L_j[X] = 0$$

Pour tout $0 \leq i \leq n$, cela donne :

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq i\leq n} \lambda_j L_j(a_i) = 0 &\iff \sum_{0\leq i\leq n} \lambda_j \delta_{ij} = 0 \\ &\iff \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

Les λ_i sont donc tous nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

(d) Pourquoi cette famille est en fait une base de $R_n[X]$?

Solution: C'est une famille libre de $n+1$ éléments d'un espace de dimension $n+1$. C'est donc une base.

3. Soit $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$. On cherche l'expression de l'unique antécédent de Y par θ, noté T.

(a) Interpréter ce problème géométriquement quant à la courbe de T.

Solution: Cela signifie que, pour tout $0 \leq i \leq n$, $T(a_i) = b_i$, c'est à dire que la courbe de T passe par les points $M_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer l'expression de T comme une combinaison linéaire des $(L_j)_{0\leq j\leq n}$.

Solution: D'après tout ce qui vient d'être fait, on pose :

$$T[X] = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i[X]$$

Exercice 1 : Un développement limité — 3 points

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

Solution: Le dénominateur s'annule pour $\cos(x) = 1$, c'est à dire $x \in \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On en déduit le domaine de définition :

$$\mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

2. (a) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, que l'on précisera.

Solution: Pour tout x du domaine, on vérifie que $f(-x) = -f(x)$. Ainsi, la fonction est impaire. On peut donc tronquer tous les termes de degré supérieur à 1 pour obtenir un développement limité d'ordre 2 car on sait d'avance que les termes de degré pairs seront nuls.
On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1} \\
&= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1} \\
&= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\
&= \frac{-\frac{x^3}{6}(1 + o(x))}{-\frac{x^2}{2}(1 + o(x))} \\
&= \frac{x}{3}(1 + o(1)) \\
&= \frac{x}{3} + o(x) \\
&= \frac{x}{3} + o(x^2) \text{ en raison de l'imparité de la fonction}
\end{aligned}$$

(b) En déduire un prolongement par continuité de la fonction f en 0. On notera $\tilde{f}$ cette fonction prolongée.

Solution: Comme f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, on peut en déduire deux choses :

- elle est prolongeable en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 0$;
- son prolongement est dérivable et on vérifie $\tilde{f}'(0) = \dfrac{1}{3}$ par identification.

(c) La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

Solution: Déjà traité précédemment.

Exercice 2 : Une équation différentielle — 2 points

On considère l'ensemble E :

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - x f(x) = 0 \right\}$$

1. (a) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' - xy = 0$$

Solution: C'est très facile. On obtient :

$$E = \left\{ x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x^2/2};\ \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) En déduire que l'ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Donner une base de E.

Solution: D'après ce qui précède, $E = \mathrm{Vec}(h)$ avec h la fonction $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x^2/2}$.
Ainsi, $\dim(E) = 1$ et h est l'unique vecteur d'une base de E.

2. (a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

Solution: Les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Il suffit donc de prouver que φ est linéaire et injective par exemple.
La linéarité de φ est simple : pour tout $(f;\ g) \in E^2$ et pour tout $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$

Examinons maintenant son noyau. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Il existe λ tel que $f = \lambda h$ et on a

$$\varphi(f) = f(1) = 0 \iff \lambda h(1) = 0 \iff \lambda \mathrm{e}^{1/2} = 0 \iff \lambda = 0$$

Donc le noyau de φ est réduit à 0.
Finalement, φ est bien un isomorphisme.

(b) Déterminer l'antécédent de 1 par φ.

Solution: On cherche λ tel que

$$\lambda h(1) = 1$$

Un peu de calcul donne $\lambda = \mathrm{e}^{-1/2}$. Ainsi, l'unique antécédent est la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/2} \mathrm{e}^{x^2/2} = \mathrm{e}^{(x^2-1)/2}$$

Exercice 3 : La dernière de l'écureuil — 5 points

Salim l'écureuil revient du Liban et rapporte une pistache qu'il range dans sa cachette contenant déjà dix-neuf noisettes.

Alors qu'il reçoit son amie lapine à dîner, Salim décide de lui montrer sa pistache [1]. Il se rend donc à sa cachette et cherche frénétiquement sa pistache en sortant les graines les unes après les autres. On suppose que l'ordre de saisie des graines est équiprobable (ce qui est discutable).

On note X le rang d'apparition de la pistache dans cette quête. Par exemple $X = 5$ signifie qu'il a obtenu la pistache à la cinquième graine sortie.

1. Proposer un univers équiprobable pour cette expérience. Préciser son cardinal.

Solution: L'ordre dans lequel il sort ses graines est important. L'univers que l'on choisit est

$$\Omega = \{\text{manières de sortir les 20 graines}\}$$

De plus, $\#\Omega = 20!$.

2. (a) Déterminer la loi de X. Comment appelle-t-on une telle loi ?

Solution: X peut prendre toutes les valeurs entières entre 1 et 20.
Pour tout $1 \leq k \leq n$, l'évènement $X = k$ signifie que la k-ème graine sortie est la pistache.
Compte-tenu de l'univers choisi, il y a 19! manières de réaliser cet évènement correspondant à la position de toutes les autres graines que la pistache.
Finalement,

$$P(X = k) = \frac{19!}{20!} = \frac{1}{20}$$

On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1;\ n]\!]$.

(b) Déterminer, par le calcul, l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Solution: Par la formule du transfert

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{20} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{20} \\ &= \frac{1}{20}\frac{20 \times 21}{2 \times 20} \\ &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

Cela signifie que si l'écureuil devait recommencer un grand nombre de fois cette expérience, la pistache apparaîtrait en moyenne en position 10,5.

1. Ne pas chercher à analyser cet énoncé sous un angle psychanalytique.

(c) Déterminer, par le calcul, la variance de X. On rappelle la formule valable [2] pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution: Par la formule de Koening-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

On calcule :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{20} k^2 P(X=k) \\ &= \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} k^2 \\ &= \frac{1}{20} \frac{20 \times 21 \times 41}{6} \\ &= \frac{7 \times 41}{2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{7 \times 41}{2} - \frac{21^2}{4} \\ &= \frac{7 \times 41 \times 2 - 21^2}{4} = \frac{7 \times 41 \times 2 - 7^2 \times 3^2}{4} \\ &= \frac{7 \times (41 \times 2 - 7 \times 9)}{4} = \frac{7 \times 19}{4} \\ &= \frac{133}{4} \end{aligned}$$

3. On suppose maintenant qu'il a rapporté de son voyage six pistaches qu'il a rangées dans sa cachette contenant à l'origine dix-neuf noisettes. Cette fois-ci, il désire montrer toutes ses pistaches à la lapine. Il procède donc de la même manière en sortant les graines les unes après les autres.

   On note Y le nombre de graines qu'il doit sortir pour obtenir toutes les pistaches. Par exemple $Y = 10$ signifie que la dixième graine sortie était la dernière pistache.

   (a) Quelles valeurs peut prendre Y ?

   Solution: Y peut prendre toutes les valeurs de 6 à 20.

   (b) Déterminer la loi de Y. *Ne pas oublier de redéfinir l'univers!*

   Solution: Notre nouvel univers possède 25! issues équiprobables.

   Pour tout $6 \leq k \leq 20$, signifie que :
   - la k-ème graine est une pistache : il y a 6 manières de choisir cette graine ;
   - les 5 autres pistaches sont parmi les $k-1$ premières graines sorties : il y a $5! \times \binom{(k-1)}{5}$ manières de placer de manière ordonnée ces 5 pistaches ;

2. C'est d'ailleurs notre écureuil qui avait trouvé cette formule en faisant des pyramides de noisettes.

- les 19 noisettes sont placées sur les emplacements restant : 19! manière de les placer.

Finalement :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \frac{6\times 5!\times \binom{(k-1)}{5}\times 19!}{25!} \\ &= \frac{6!\times 19!\times \binom{(k-1)}{5}}{25!} \\ &= \frac{\binom{(k-1)}{5}}{\binom{25}{6}} \end{aligned}$$

(c) Calculer son espérance. On donne la formule, valable pour tout les entiers $(n;\ p)\in\mathbb{N}^*$ tels que $p\geq n$:

$$\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n}=\binom{p+1}{n+1}$$

Donner une approximation à l'entier le plus proche de $E(Y)$.

Solution: Par la formule du transfert :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=6}^{25} kP(Y=k) \\ &= \sum_{k=6}^{25} k\times\frac{\binom{(k-1)}{5}}{\binom{25}{6}} \\ &= \frac{1}{\binom{25}{6}}\sum_{k=6}^{25} k\times\binom{(k-1)}{5} \\ &= \frac{1}{\binom{25}{6}}\sum_{k=6}^{25}\frac{k\times(k-1)!}{5!(k-6)!} \\ &= \frac{1}{\binom{25}{6}}\sum_{k=6}^{25}\frac{k!}{5!(k-6)!} \\ &= \frac{1}{\binom{25}{6}}\sum_{k=6}^{25} 6\times\frac{k!}{6!(k-6)!} \\ &= \frac{6}{\binom{25}{6}}\sum_{k=6}^{25}\binom{k}{6} \\ &= \frac{6}{\binom{25}{6}}\times\binom{26}{7} \text{ d'après la formule donnée dans l'énoncé.} \end{aligned}$$

Travaillons sur l'expression :

$$\frac{6}{\binom{25}{6}}\times\binom{26}{7}=\frac{6\times 26!\times 6!\times 19!}{25!\times 7!\times 19!}=\frac{6\times 26}{7}$$

Finalement :

$$E(Y)=\frac{6\times 26}{7}$$

En posant manuellement la division, on obtient $E(Y)\simeq 22$.