



Lycée Richelieu  
Rueil-Malmaison

# Concours Blanc de TSI1 Épreuve de Mathématiques

*Durée : 4h, calculatrice interdite*

*Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.*

*On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.*

**Exercice 1****2 points**Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $]0; 1[$  :

$$xy' \ln(x) - y = 3x^2 (\ln(x))^2$$

**Solution:** Déjà traité en travaux dirigés. On rappelle la correction :Pour  $x \in ]0; 1[$ ,  $\ln(x) \neq 0$  et  $x \neq 0$  donc l'équation est équivalente à

$$y' - \frac{1}{x \ln(x)} y = 3x \ln(x)$$

Or, une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$  est  $x \mapsto \ln|\ln(x)|$ .Or, sur cet intervalle,  $\ln|\ln(x)| = \ln(-\ln(x))$ . On obtient les solutions de l'équation homogène :

$$\left\{ x \mapsto K e^{\ln(-\ln(x))} = -\ln(x); K \in \mathbb{R} \right\}$$

La méthode de variation de la constante fonctionne ici très bien et on obtient finalement les solutions :

$$\left\{ x \mapsto \left( \frac{3}{2} x^2 + K \right) \ln(x); K \in \mathbb{R} \right\}$$

**Exercice 2****3 points**Soient  $A_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$  trois points fixés du plan muni d'un repère.L'objectif de cet exercice est de trouver les coefficients  $(a_0; a_1; a_2) \in \mathbb{R}^3$  tels que la courbe de la fonction  $f: x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  passe par les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .

1. Écrire le système linéaire de trois équations à trois inconnues vérifié par  $(a_0; a_1; a_2)$ .

**Solution:** La courbe de  $f$  passe par les trois points si et seulement si :

$$\begin{cases} f(\alpha_1) = \beta_1 \\ f(\alpha_2) = \beta_2 \\ f(\alpha_3) = \beta_3 \end{cases}$$

Cela conduit à un système sur  $(a_0; a_1; a_2)$  :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_1^2 = \beta_1 \\ a_0 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2^2 = \beta_2 \\ a_0 + a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_3^2 = \beta_3 \end{cases}$$

La matrice augmentée, dont on se servira après, de ce système est :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \beta_3 \end{array} \right)$$

2. Discuter le rang du système en fonction des valeurs de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

**Solution:** On va travailler par équivalences successives par opérations sur les lignes de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \beta_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \beta_2 - \beta_1 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 & \beta_3 - \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1) & \beta_2 - \beta_1 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 + \alpha_1) & \beta_3 - \beta_1 \end{pmatrix}$$

On doit raisonner sur  $\alpha_2 - \alpha_1$  pour le pivot suivant :

- Si  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , la seconde ligne est nulle. Et le système sera de rang 2 si  $\alpha_3 - \alpha_1 \neq 0$ .  
Toujours dans ce cas, si  $\alpha_3 - \alpha_1 = 0$ , le système est de rang 1.
- Si  $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$ , on continue le pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \beta_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 0 & 1 & (\alpha_2 + \alpha_1) & \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ 0 & 0 & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 + \alpha_1) - (\alpha_3 - \alpha_1) \times (\alpha_2 + \alpha_1) & \beta_3 - \beta_1 - (\alpha_3 - \alpha_1) \times \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \beta_1 \\ 0 & 1 & (\alpha_2 + \alpha_1) & \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ 0 & 0 & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) & \beta_3 - \beta_1 - (\alpha_3 - \alpha_1) \times \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \end{pmatrix}$$

On doit donc maintenant raisonner sur  $(\alpha_3 - \alpha_1)$  et  $(\alpha_3 - \alpha_2)$ .

Si l'un de ces deux facteurs est nul, le système sera de rang 2. Dans le cas contraire (les deux facteurs sont non nuls), le système est de rang 3.

Finalement, d'après la disjonction de cas opérée plus haut, le système est de rang 3 lorsque les trois nombres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont distincts deux à deux.

Il est de rang 2 lorsque deux des facteurs exactement sont égaux.

Il est de rang 1 lorsque les trois facteurs sont égaux.

### Exercice 3

4 points

Un écureuil un peu maniaque décide de disposer ses noisettes en pyramide à base carrée.

Ainsi, il commence sa pyramide en disposant  $p \times p$  noisettes pour la base carrée.

Puis, à l'étage du dessus il met  $(p - 1) \times (p - 1)$  noisettes.

Et ainsi de suite, jusqu'à la dernière noisette, tout en haut de l'édifice.

L'objectif de ce problème est de déterminer le nombre total de noisettes, connaissant le nombre d'étages de la pyramide, noté  $n$ .

1. Rappeler la formule donnant :

$$T_n = \sum_{k=1}^n k$$

**Solution:** C'est  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2. On pose  $P_n = \sum_{k=1}^n k^2$ . L'objectif de ce problème est donc de déterminer une formule simplifiée de  $P_n$ .

Pour cela on utilise la somme télescopique  $S_n = \sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3]$

(a) Déterminer une expression simplifiée de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Solution:** Tous les termes de la somme télescopique s'éliminent :

$$\begin{aligned} S_n &= 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \dots + (n+1)^3 - n^3 = (n+1)^3 - 1^3 \\ &= (n+1)^3 - 1^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 \\ &= n(n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$

(b) Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , développer et réduire  $(k+1)^3 - k^3$ .

**Solution:** On obtient :

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

(c) En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $T_n$ ,  $P_n$  et  $n$ .

**Solution:** On utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] \\ &= \sum_{k=1}^n [3k^2 + 3k + 1] \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 3P_n + 3T_n + n \end{aligned}$$

(d) Déduire des deux questions précédentes qu'une expression simplifiée de  $P_n$  est

$$P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Solution:** On vient de montrer que  $S_n = n(n^2 + 3n + 3)$  et  $S_n = 3P_n + 3T_n + n$ .

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{S_n - 3T_n - n}{3} \\&= \frac{n(n^2 + 3n + 3) - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n}{3} \\&= \frac{2n(n^2 + 3n + 3) - 3n(n+1) - 2n}{6} \\&= \frac{n[2(n^2 + 3n + 3) - 3(n+1) - 2]}{6} \\&= \frac{n[2n^2 + 3n + 1]}{6}\end{aligned}$$

Or,  $(2n+1)(n+1) = 2n^2 + 3n + 1$ . On obtient donc bien :

$$P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Donner un équivalent simple de  $P_n$  pour  $n$  très grand.

**Solution:** On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en factorisant le numérateur par les termes dominants :

$$P_n = \frac{2n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{6}$$

C'est à dire :

$$P_n = \frac{n^3}{3} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1$ , par produit et somme.

On en déduit :

$$P_n \sim \frac{n^3}{3}$$

#### Exercice 4

7 points

On considère dans ce problème la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par un premier terme  $u_0$  dans  $]0; 1[$  et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$$

On définit par ailleurs la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ .

1. (a) Vérifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ .

**Solution:** C'est la forme canonique!

$$\text{On a } \alpha = \frac{-(-1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{-(-1)^2 + 4 \times 1 \times 1}{4 \times 1} = \frac{3}{4}.$$

- (b) En déduire que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .  
Justifier alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien définie.

**Solution:** D'après la forme canonique, pour tout  $x$ ,  $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} > 0$ . Ainsi,  $\sqrt{x^2 - x + 1}$  existe.  
Par composition,  $f$  est donc définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
De plus, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Par une récurrence immédiate, on en déduit que  $u_n$  existe pour tout  $n$ .

- (c) Déduire de la question 1.a) que, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) \in [0; 1]$ .

**Solution:** Par composition, la forme canonique permet de déterminer rapidement le tableau des variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
$x^2 - x + 1$	$+\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$	$+\infty$

(On a calculé  $f(0) = 1$  et  $f(1) = 1$ )  
Par lecture du tableau de variations, on en déduit que  $f([0; 1]) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right] \subset [0; 1]$ .

- (d) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

**Solution:** Montrons par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$

- C'est vrai au rang 0 car  $u_0 \in [0; 1]$ .
- On suppose que, pour un certain  $n$ ,  $u_n \in [0; 1]$ . Cela entraîne que  $f(u_n) \in [0; 1]$  d'après la question précédente.  
Or  $f(u_n) = u_{n+1}$ . Ainsi,  $u_{n+1} \in [0; 1]$ . La proposition est donc héréditaire!

Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier  $n$ .

2. (a) Déterminer le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

**Solution:** Déjà fait au dessus.

- (b) Montrer que, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) \geq x$ .

**Solution:** On va résoudre  $f(x) \geq x$  en utilisant la stricte croissance de la fonction carré sur  $\mathbb{R}^+$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned} f(x) \geq x &\iff x^2 - x + 1 \geq x^2 \\ &\iff -x + 1 \geq 0 \\ &\iff 1 \geq x \end{aligned}$$

Cette dernière expression est vraie pour  $x \in [0; 1]$ .

(c) Représenter alors la courbe représentative de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

On se placera dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  de l'**annexe à rendre avec la copie** et on utilisera l'échelle 10 cm pour 1 unité.

On fera apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice.

Dans cette question uniquement, on suppose  $u_0 = \frac{1}{4}$ ; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution:** Fait en annexe. On a calculé rapidement  $\sqrt{3} \approx 0,87$  et utilisé le lieu du minimum. Puis on a déterminé les premiers termes de  $(u_n)$  avec la construction usuelle.

3. (a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Solution:** On sait que  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Or, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) \geq x$ . Or, on a prouvé que pour tout  $n$ ,  $u_n \in [0; 1]$ .

Ainsi, pour tout  $n$ ,  $f(u_n) \geq u_n$ , c'est à dire  $u_{n+1} \geq u_n$ , ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est croissante.

(b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Solution:** La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

(c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution:** Comme la fonction  $f$  est continue, la limite de  $(u_n)$  est un point fixe de  $f$ . On doit donc résoudre  $f(x) = x$  sur  $\mathbb{R}^+$  en utilisant le fait que la fonction carré est injective sur cet intervalle. Or, pour tout  $x$ ,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - x + 1 = x^2 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

La limite est donc 1.

4. Écrire en langage Python un script qui affiche la valeur de  $u_{10}$  pour  $u_0 = 0,5$ .

On pourra utiliser la fonction `sqrt` du module de `maths`.

**Solution:** Voici une possibilité :

```
u=0.5
for i in range(9):
```

```

u=(u**2-u+1)**0.5
print(u)

```

### Exercice 5

6 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{e}, \vec{f})$  (unité graphique 4 cm).  
Soit  $I$  le point d'affixe 1. On note  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[OI]$  et on nomme son centre  $\Omega$ .

#### Partie I

On pose  $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  et on note  $A_0$  son image.

1. Montrer que le point  $A_0$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .

**Solution:** Le centre du cercle a pour affixe  $z_\Omega = \frac{1}{2}$ .  
D'autre part, le rayon du cercle est  $\frac{1}{2}$ .  
Or  $|a_0 - z_\Omega| = \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$  qui correspond bien au rayon du cercle. Ainsi  $A_0$  est sur le cercle.

2. Soit  $B$  le point d'affixe  $b$ , avec  $b = -1 + 2i$ , et  $B'$  le point d'affixe  $b'$  telle que  $b' = a_0 b$ .

- (a) Calculer  $b'$ .

**Solution:** On a  $b' = ba_0 = \dots = \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}$ .

- (b) Démontrer que le triangle  $OBB'$  est rectangle en  $B'$ .

**Solution:** Il faut montrer que l'angle  $(\vec{B'O}; \vec{B'B})$  vaut  $\pm \frac{\pi}{2}$ , c'est à dire que le nombre  $\frac{b' - b}{b' - 0}$  est un imaginaire pur. Faisons le calcul :

$$\frac{b - b'}{-b'} = \frac{b(a_0 - 1)}{ba_0} = \frac{a_0 - 1}{a_0} = \dots = i$$

Ainsi l'angle  $(\vec{B'O}; \vec{B'B})$  est bien droit et donc le triangle  $OBB'$  est rectangle en  $B'$ .



## Partie II

Soit  $a$  un nombre complexe non nul et différent de 1, et  $A$  son image dans le plan complexe.

À tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = az$ .

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points  $A$  tels que le triangle  $OMM'$  soit rectangle en  $M'$ .

(a) Interpréter géométriquement  $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$ .

**Solution:** Soit  $A$  l'image de  $a$ . L'argument de  $\left(\frac{a-1}{a}\right)$  correspond à l'angle  $(\vec{OA}; \vec{IA})$ .

(b) Montrer que  $(\vec{M'O}, \vec{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Solution:** On a  $(\vec{M'O}, \vec{M'M}) = \arg\left(\frac{z-z'}{-z'}\right) = \arg\left(\frac{-az+z}{-az}\right) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$ .

(c) En déduire que le triangle  $OMM'$  est rectangle en  $M'$  si et seulement si  $A$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  privé de  $O$  et de  $I$ .

**Solution:** D'après la question précédente, on cherche les valeurs de  $a$  telles que  $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$  soit égal à  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

Or, cette dernière condition est équivalente à ce que l'angle  $(\vec{OA}; \vec{IA})$  soit droit, c'est à dire à ce que le triangle  $IOA$  soit rectangle en  $A$ .

On cherche donc  $A$  sur le cercle de diamètre  $[OI]$  mais distinct de  $O$  et de  $I$ , c'est à dire sur  $\mathcal{C}$  privé de  $O$  et  $I$ .

2. Dans cette question,  $M$  est un point de l'axe des abscisses, différent de  $O$ .

On note  $x$  son affixe.

On choisit  $a$  de manière que  $A$  soit un point de  $\mathcal{C}$  différent de  $I$  et de  $O$ .

Montrer que le point  $M'$  appartient à la droite  $(OA)$ .

En déduire que  $M'$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur cette droite.

**Solution:** On veut montrer que les points  $O$ ,  $M'$  et  $A$  sont alignés, c'est à dire que  $\frac{z'-0}{a-0}$  est un réel.

Or,  $\frac{z'}{a} = \frac{za}{a} = z$  et  $z$  est un réel puisque  $M$  est sur l'axe des abscisses.

Ces trois points sont donc bien alignés.

D'autre part, on a l'angle  $(\vec{M'O}; \vec{M'M})$  qui est droit car le point  $A$  est un point de  $\mathcal{C}$  différent de  $I$  et de  $O$ .

Ainsi,  $M'$  est bien le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OA)$ .

Nom et prénom : .....

**Annexe à rendre avec la copie**

