Lycée Richelieu
Rueil-Malmaison

Concours Blanc de TSI1
Épreuve de Mathématiques

Durée : 4h, calculatrice interdite

*Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix mais **il ne doit pas fractionner la rédaction d'un exercice**.*

On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.

Exercice 1 : Questions diverses — 11 points

L'ensemble des questions de cet exercice sont, sauf indication contraire, indépendantes.

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

   (a) Rappeler la définition formelle de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

   (b) Montrer que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell$‘.

2. Soient E et F deux évènements d'un univers probabilisé Ω.

   (a) Rappeler la définition de « E et F sont indépendants ».

   (b) Montrer cet équivalence :

   « E et F sont indépendants si et seulement $\overline{E}$ et F le sont. »

3. Soient u un morphisme entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F.

   (a) Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(u)$, le noyau de u.

   (b) Montrer cette implication :

   « Si $\mathrm{Ker}(u) = \left\{\vec{0}_E\right\}$ alors u est injective. »

   (c) La réciproque est-elle vraie ?

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' + 2y = \cos x e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   Si le passage dans les complexes est exploité, un bonus sera attribué.

5. λ désigne un paramètre réel fixé. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases}$$

6. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

   (a) Montrer par récurrence sur n le prédicat :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

   (c) Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie en sortie la valeur de u_n.

Exercice 2 : Plan complexe — 8 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{e};\ \vec{f}\right)$.
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et on note A_0 son image.

1. Dans l'**annexe à rendre avec la copie**, tracer $\mathscr{C}$ et placer A_0.
2. Donner sans le justifier l'affixe z_Ω de Ω ainsi que le rayon de $\mathscr{C}$.
3. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\mathrm{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.
   (a) Calculer b'.
   (b) Placer B' dans le repère de l'annexe.
   (c) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.
   (a) Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.
   (b) Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O},\ \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$.
   (c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.
2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O. On note x son affixe.
   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
   (a) Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
   (b) En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Exercice 3 : Étude de fonction — 11 points

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormal.

1. (a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit f' la dérivée de f.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\right]$.
2. Afin de déterminer le signe de f', on va étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.
   (a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de φ.
   (b) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
   (c) En faisant le changement de variable $T = t+1$, déterminer également $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} -1} \varphi(t)$
   (d) Déterminer l'expression et le signe de la dérivée de φ, puis dresser le tableau de variations de φ.
   (e) En déduire le signe de φ sur son ensemble de définition.
3. En exploitant les questions qui précèdent, déterminer le sens de variation de f.

4. (a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
5. En faisant le changement de variable $X = \mathrm{e}^{x}$, déterminer également $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Comment s'interprète ce résultat pour la courbe de f ?
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
8. Dans le repère en annexe, tracer $\mathcal{T}$ ainsi que $\mathcal{C}$. On donne $\ln(2) \simeq 0,69$.

Exercice 3 : Algèbre et géométrie — 10 points

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \left\{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y = 0\right\} \qquad \tilde{F} = \left\{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y = 1\right\} \qquad G = \{(\lambda;\ -\lambda;\ 0) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : Géométrie

1. Quels lieux géométriques définissent F, $\tilde{F}$ et G ?
2. Expliquer pourquoi l'intersection de F et $\tilde{F}$ est réduite au vide.
3. On souhaite déterminer la distance entre F et $\tilde{F}$.
   (a) Montrer que G est perpendiculaire à F et $\tilde{F}$.
   (b) Déterminer l'intersection de G et $\tilde{F}$.
   (c) Donner sans le justifier l'interseciton entre G et F puis en déduire la distance entre F et $\tilde{F}$.

Partie II : Algèbre linéaire

$E = \mathbb{R}^3$ est considéré ici comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera une base $\mathscr{B}_f$.
   (b) $\tilde{F}$ et G sont-ils aussi des sous-espaces vectoriels ? Justifier.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. On considère l'application :

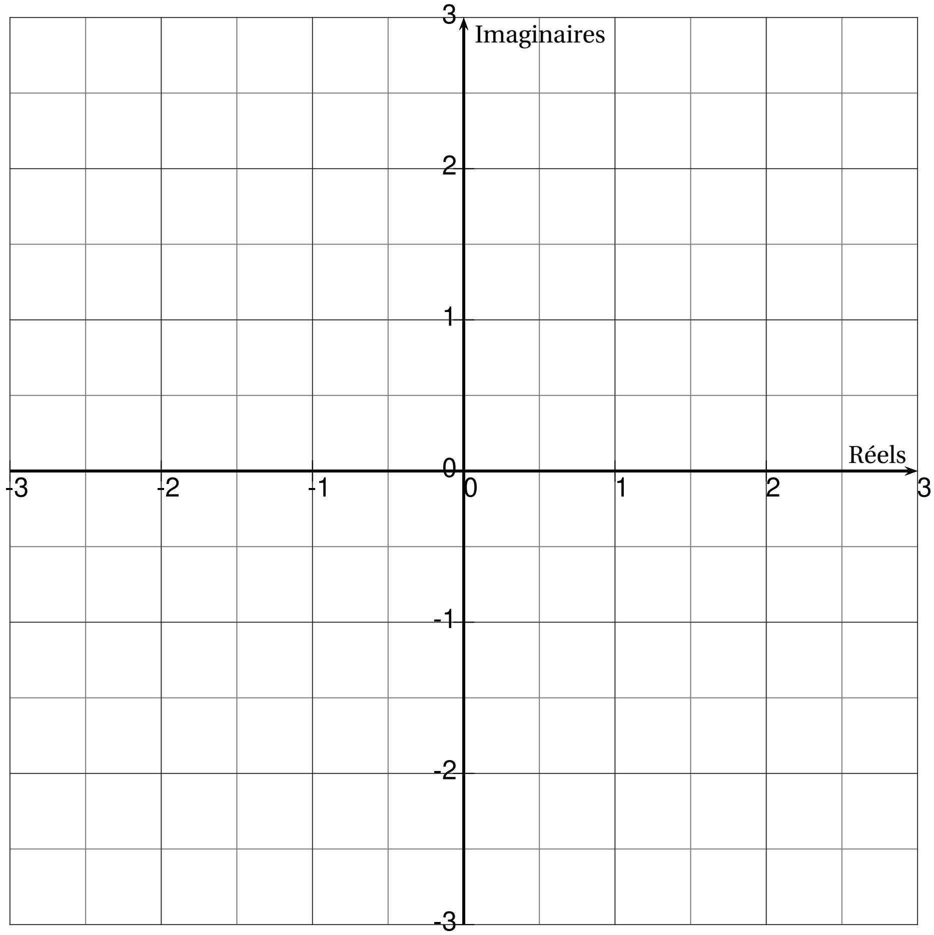
$$u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme.
   (b) Déterminer l'image et le noyau de u. u est-elle un automorphisme ?
   (c) Montrer que la restriction de u à G est un endomorphisme remarquable de G.

ANNEXE à remettre avec la copie

Nom et prénom :

Exercice 2



Exercice 3