Planche n^o 2: Configurations du plan

Pour chacun des exercices ci-dessous, il peut exister plusieurs raisonnements menant à la solution.

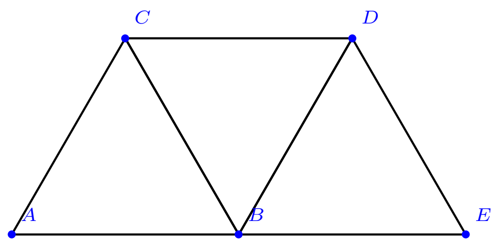
Exercice 0 : Fiches de cours.

Faire deux fiches de cours :

1. Une fiche présentant une illustration ainsi que la propriété caractéristique [1] des diagonales de chacun des quadrilatères connus : le parallélogramme, le rectangle, le losange, le carré.
2. Une fiche présentant une illustration d'un triangle ABC quelconque et donnant la définition de :
   — la médiane issue de C
   — la médiatrice de [BC]
   — la hauteur issue de B.
   On précisera également les noms des points de concours des trois médianes, des trois hauteurs, des trois médiatrices.

   Enfin, on énoncera la propriété permettant de caractériser un triangle isocèle à l'aide d'une médiatrice ainsi que la propriété caractéristique concernant le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle.

Exercice 1



Les triangles ABC, BCD et BDE sont équilatéraux et disposés comme ci-dessus.

Prouver que EDA est un triangle rectangle en D.

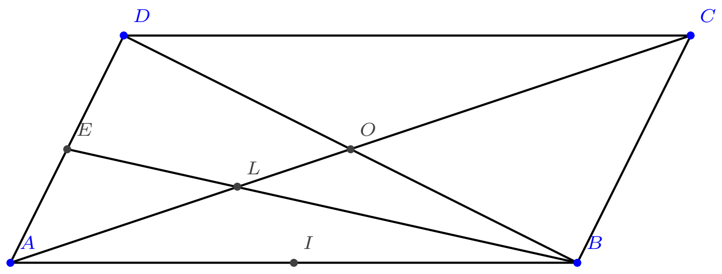
Exercice 2 ♣

ABC est un triangle isocèle en A et D est le symétrique de B par rapport à A.

Prouver que BCD est un triangle rectangle en C.

1. Une propriété caractéristique est une propriété qui est propre à un objet. Par exemple « M est situé à égale distance de B et C si et seulement si M est sur la médiatrice de [BC] » est une propriété caractéristique de la médiatrice de [BC].

Exercice 3



On suppose que :

- $ABCDE$ est un parallélogramme non aplati de centre O
- les points E et I sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[AB]$
- L est l'intersection (AC) et (EB)

Prouver que les points D, L et I sont alignés.

Exercice 4 : Démonstration des coordonnées du milieu.

Dans toute la suite $(O;\ I;\ J)$ désigne un repère quelconque.
$A\,(x_A;\ y_A)$ et $B\,(x_B;\ y_B)$ sont deux points quelconques du plan dont le milieu est M.
On va ici démontrer la formule des coordonnées du milieu d'un segment en se limitant au calcul de l'abscisse de M.

Pour cela, on trace les droites D_{Ax}, D_{Mx} et D_{Bx} parallèles à (OJ) passant respectivement par A, M et B.
On place ensuite A_x, M_x et B_x les intersections respectives de D_{Ax}, D_{Mx} et D_{Bx} avec l'axe des abscisses.
Enfin, on trace la droite D_{Ay} parallèle à (OI) passant par A et on place les points M' et B' intersections respectives de cette droite et des droites D_{Mx} et D_{Bx}.

> ⚠ Il faut ici raisonner en toute généralité sans donner de valeurs particulières aux coordonnées de A et B.

1. (a) Faire le dessin d'un tel repère, placer les points A, B de la manière la plus quelconque possible, puis placer le point M.
   (b) Réaliser la construction des droites D_{Ax}, D_{Mx}, D_{Bx}, D_{Ay} et enfin placer les points A_x, M_x, B_x, M' et B'.
2. Quelle est la nature des quadrilatères $A_xM_xM'A$ et $M_xB_xB'M'$? *Justifier.*
3. (a) Montrer que le point M' est le milieu de $[AB']$.
   (b) Déduire de ce qui précède que M_x est le milieu de $[A_xB_x]$.
4. (a) Quelles sont les abscisses des points A_x et B_x dans le repère de droite $(O;\ I)$?
   (b) En déduire l'abscisse du point M_x dans le repère de droite $(O;\ I)$.
5. Conclure quant à l'abscisse du point M dans le repère $(O;\ I;\ J)$.

Exercice 5 : Propriété des trois hauteurs d'un triangle ♣ ♣

On va ici prouver une propriété concernant les hauteurs d'un triangle.

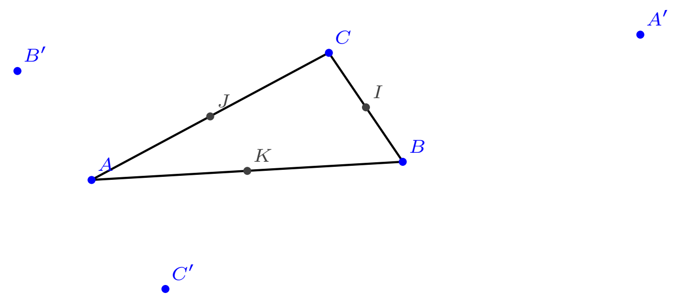
ABC est un triangle quelconque. On construit :

- les points I, J et K milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
- le point A' symétrique de A par rapport à I
- le point B' symétrique de B par rapport à J
- le point C' symétrique de C par rapport à K

1. (a) Prouver que le quadrilatère $ABA'C$ est un parallélogramme.
   (b) Que dire du quadrilatère $ABCB'$? *Inutile de justifier ici.*
2. (a) Déduire des deux premières questions que les points B', C et A' sont alignés.
   (b) Que représente le point C pour le segment $[A'B']$? *Justifier.*

   On note (F) la droite passant par C perpendiculaire à (AB).
3. Prouver que (F) est également la médiatrice de $[A'B']$

   On note (E) la droite passant par B perpendiculaire à (AC) et (D) la droite passant par A perpendiculaire à (BC). Ainsi, (D), (E) et (F) sont les hauteurs du triangle ABC.
4. (a) Que représentent ces trois droites pour le triangle $A'B'C'$?
   (b) Conclure quant aux hauteurs du triangle ABC.



Exercice 6 : Échelle qui glisse ♣

Une échelle glisse le long d'un mur. Elle est représentée par le segment [AB] plus bas.
Le point O correspond à la base du mur et le point M est le milieu du segment [AB]. On suppose enfin que l'angle $\widehat{BOA}$ est droit.

Quelle courbe décrit le point M à mesure que l'échelle glisse ? *Justifier.*

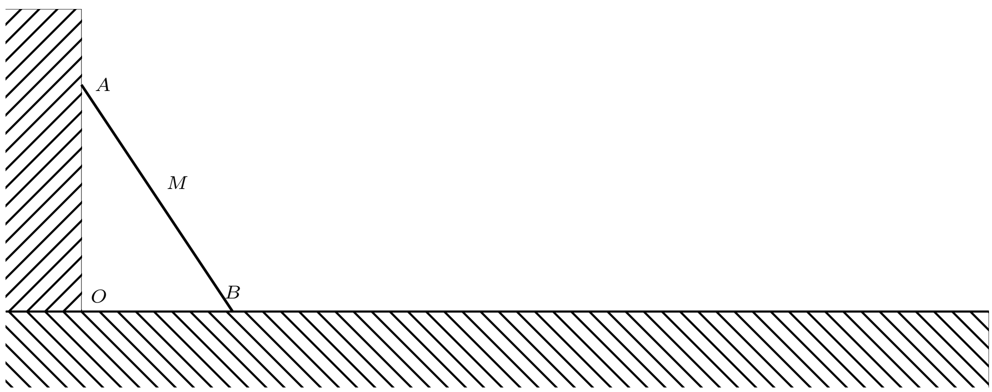
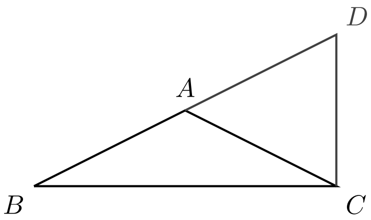


Planche n° 2 :
Correction partielle

Je ne corrige ici que les exercices du devoir maison

Exercice 2

Un petit dessin va nous aider à visualiser la situation.



On sait que $BA = AC$ car le triangle ABC est isocèle en A. D'autre part, $BA = AD$ car D est le symétrique de B par rapport à A. Ainsi, on a $AB = AC = AD$, ce qui prouve que A est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD. Or A est le milieu de $[BD]$.
Ainsi, d'après la propriété du cercle circonscrit aux triangles rectangles, le triangle BCD est rectangle en C.

Exercice 4

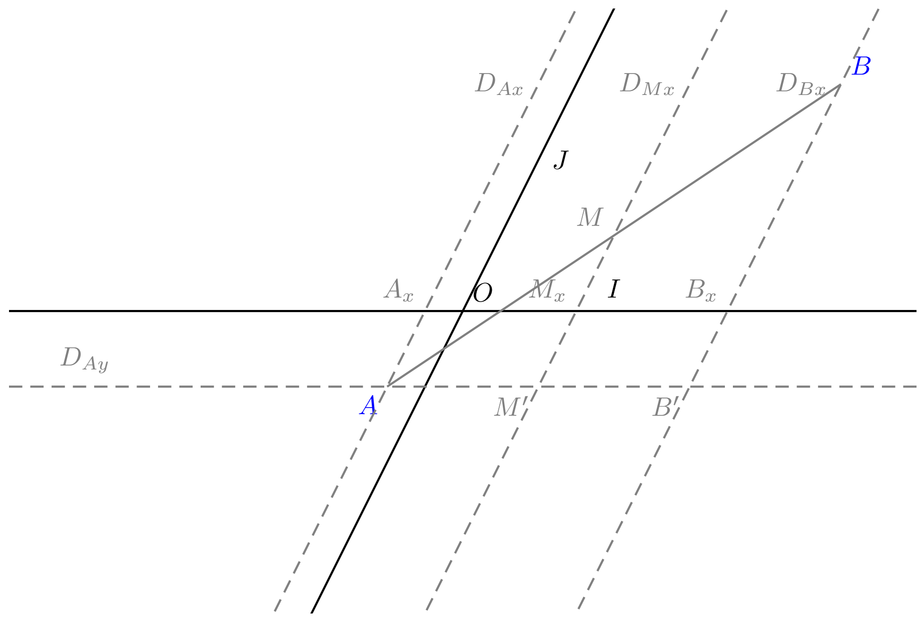
1. (a) Fait sur le dessin ci-après.
   (b) Fait sur le dessin ci-après.
2. Les quadrilatères sont des parallélogrammes. Prouvons-le pour $A_xM_xM'A$:
   L'axe des abscisses qui correspond à (A_xM_x) est, par construction, parallèle à la droite $(M'A) = D_{Ay}$. De même, les droites (A_xA) et (M_xM') sont parallèles entre elles car, par construction, toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées. Ainsi, le quadrilatère $A_xM_xM'A$ a ses côtés opposés parallèles. C'est donc un parallélogramme.
   La nature de $M_xB_xB'M'$ se prouve de manière similaire.
3. (a) D'après la question précédente, on a $A_xM_x = AM'$ et $M_xB_x = M'B'$. Il suffit donc de prouver que M' est le milieu de $[AB']$ pour conclure.
   Mais on remarque un configuration de Thalès. En effet :
   - M' appartient à $[AB']$ et M appartient à $[AB]$
   - Les droites (MM') et (BB') sont parallèles car, par construction, toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées.

   Comme M est le milieu de $[AB]$, le théorème de Thalès permet d'en déduire que M' est le milieu de $[AB']$.
   En résumé, on a bien $A_xM_x = AM' = M'B' = M_xB_x$.
   (b) D'après ce qui précède, il est évident que M_x est le milieu de $[A_xB_x]$.

(c) On applique ici la formule de l'abscisse du milieu dans un repère de droite.

Dans le repère de droite $(O;\ I)$, l'abscisse de M_x est $\dfrac{x_A + x_B}{2}$ car l'abscisse de A_x et celle de A sont, par construction, identiques ; de même que l'abscisse de B_x et celle de B.

4. Comme, par construction, l'abscisse de M_x dans le repère $(O;\ I)$ est identique à l'abscisse de M, on en déduit que l'abscisse de M est $\dfrac{x_A + x_B}{2}$.



Exercice 5

1. (a) Les diagonales du quadrilatère $ABA'C$ sont $[AA']$ et $[BC]$. Or, par construction, ces deux segments ont le même milieu : le point I. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.

   (b) Ce quadrilatère est, pour les mêmes raisons, un parallélogramme.

   (c) On va prouver que les droites (CA') et $(B'C)$ sont parallèles, ce qui permettra de conclure.
   Mais, d'après les deux questions précédentes, ces deux droites sont parallèles à (AB). Ainsi, elles sont donc bien parallèles entre elles.
   Comme (CA') et $(B'C)$ sont parallèles et ont un point commun, elles sont en fait confondues, ce qui prouve l'alignement des points B', C et A'.

   (d) Le point C est le milieu de $[A'B']$. En effet, on a $B'C = AB$ et $CA' = AB$ car les quadrilatères $ABA'C$ et $ABCB'$ sont des parallélogrammes.
   Finalement, on a bien $B'C = AB = CA'$ et comme les points sont alignés, cela permet de conclure.

2. (F) est perpendiculaire à $[A'B']$ puisque (F) est perpendiculaire à (AB) et que, d'après ce qui précède, les droites $(A'B')$ et (AB) sont parallèles. De plus, (F) passe par le milieu de $[A'B']$. C'est donc bien la médiatrice de $[A'B']$.

3. (a) Ces trois droites sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$. Elles sont donc concourantes.

   (b) Ces trois droites étant également les hauteurs ABC, on en déduit que les hauteurs de ABC sont concourantes.