Exercices de Seconde

Pierre-Alexandre Fournié

2015

Planche n° 1: Éléments de langage mathématique, introduction à la géométrie

Exercice 1 : Longueur d'un chemin

Soient A, B, C, D et E des points tels que :
- D appartient à $[AB]$ et E appartient à $[AC]$.
- l'angle $\widehat{BAC}$ est droit
- les droites (BC) et (DE) sont parallèles
- $AB = 4$, $AD = 2$ et $AC = 3$

On se propose de calculer la longueur du chemin reliant en ligne droite les points A, D, E, C et B.

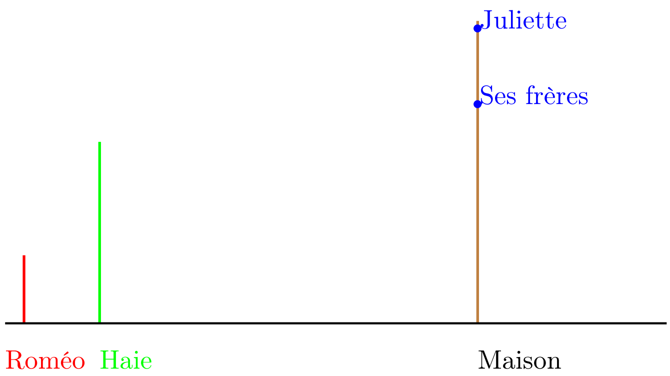
1. Faire, à main levée, une figure sur votre feuille et repasser sur les traits du chemin $ADECB$.
2. Calculer la longueur AE et en déduire la longueur EC.
3. Calculer la longueur BC et en déduire la longueur DE.
4. Finalement, calculer la longueur du chemin chemin $ADECB$.

Exercice 2 : Roméo et Juliette

Le schéma suivant est un plan en coupe du jardin de Juliette. On donne les éléments suivants :
- le mur de la maison est séparé de la haie du jardin de $10m$.
- la haie mesure $4,80m$ de haut
- la fenêtre de Juliette est située à $7,80m$ de haut
- la fenêtre des frères de Juliette est située à $5,80m$ de haut
- Roméo mesure $1,80m$

Roméo souhaite voir Juliette sans être vu de ses frères.

1. À quelle distance de la haie Roméo doit-il se placer pour que Juliette commence à le voir ?
2. À partir de quelle distance de la haie Roméo risque-t-il d'être vu par les frères ?



Exercice 3 : Méthode antique pour le calcul de la hauteur d'un bâtiment

A une certaine heure d'une journée ensoleillée, l'ombre projetée par un bâton de 1m tenu verticalement a une longueur de 75cm. Au même instant, l'ombre projetée par un bâtiment a une longueur de 12m. Quelle est la hauteur de ce bâtiment ?

Exercice 4 : Perspective

La perspective a pour objectif de représenter sur une surface plane des scènes en volume.

La géométrie nous fournit des moyens de calculer les caractéristiques de cette « projection ».
Pour cela, on va imaginer que

- l'œil du peintre est situé en un point situé à 160 cm de hauteur ;
- la toile est un rectangle disposé verticalement à 100 cm du sol et d'une hauteur totale de 100 cm (le haut de la toile est donc située à 200 cm du sol) ;
- le peintre est debout derrière sa toile à une distance de 100 cm ;
- on veut représenter une pomme posée sur le sol, située pile en face du peintre, à une distance de 300 cm devant la toile.

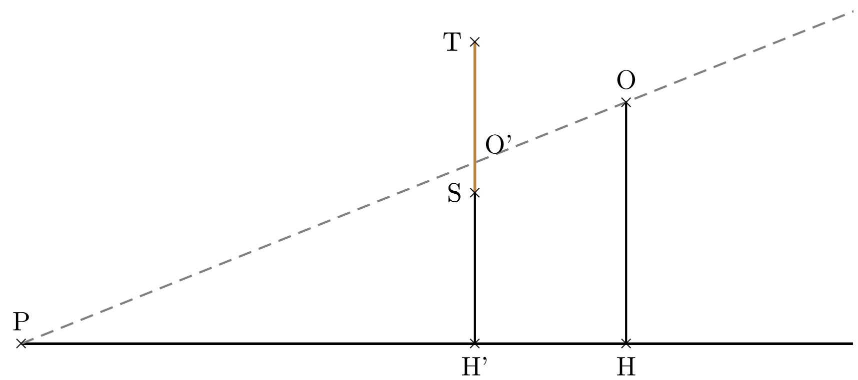
Le principe général de la perspective est de déterminer pour chaque objet de l'espace sa position sur la toile en calculant l'intersection entre la ligne reliant l'œil du peintre et l'objet et le rectangle de la toile.

Le schéma ci-après, à l'échelle, représente une coupe du profil de la scène et ce tableau établit une correspondance entre les points et les objets.

Nom sur le schéma	**Objet**
O	Œil du peintre
P	Pomme
segment [ST]	Toile
H'	Point sur le sol à la verticale de la toile
H	Point sur le sol à la verticale de l'œil
O'	Position de la pomme sur la toile

On a ainsi, par hypothèse

$$\begin{cases} PH' & = 300 \\ HH' & = 100 \\ H'S & = 100 \\ ST & = 100 \\ OH & = 160 \end{cases}$$



En rédigeant soigneusement, déterminer la valeur de SO', qui permet de positionner la pomme sur la toile.

Exercice 5 : Logique

Pour chacune des implications suivantes :

- Préciser si elle est vraie ou fausse. Lorsqu'elle est fausse trouver un contre exemple.
- Écrire la réciproque et préciser si elle est vraie ou fausse. Lorsqu'elle est fausse, trouver un contre-exemple.
- Lorsque le sens direct et réciproque sont vrais, réécrire l'équivalence correspondante.

<u>Exemple :</u> « Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $x + y = 0$. »

La phrase est vraie car $0 + 0 = 0$.
La réciproque s'écrit « $x + y = O$ implique $x = 0$ et $y = 0$ ». Elle est fausse. En effet $-2 + 2 = 0$ et pourtant $2 \neq 0$ et $-2 \neq 0$.

Voilà maintenant les phrases sur lesquelles vous devez travailler :

a) Soient x et y deux nombres. Si x et y sont deux nombres positifs alors $x + y$ est positif.

b) ABC est un triangle isocèle en A implique que la médiatrice de $[BC]$ passe par A.

c) $ABCD$ est un rectangle $\Longrightarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme.

d) Soient A, B et M trois points. Si $AM = BM$ alors M est le milieu de $[AB]$.

e) Soient a, b et x trois nombres. $a \geq b \Longrightarrow a + x \geq b + x$

Exercice 6 : Utilisation des mots de liaison

Dans le tableau suivant, associer chaque élément de la colonne de gauche à un élément de la colonne de droite pour former une phrase correcte :

L'expression «or» sert à introduire	
L'expression «car» sert à introduire	une information supplémentaire utile
L'expression «mais» sert à introduire	
L'expression «puisque» sert à introduire	une justification logique
L'expression «parce que» sert à introduire	
L'expression «donc» sert à introduire	une équivalence logique
L'expression «ainsi» sert à introduire	
L'expression «on en déduit que» sert à introduire	une conséquence logique
L'expression «est équivalent à» sert à exprimer	

On a donné l'exercice suivant à résoudre :

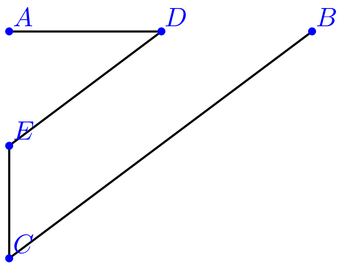
> Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$ et $BC = 4$.
> Déterminer la longueur AC

À vous de recopier et compléter la correction en remplaçant les .... par les expressions suivantes, éventuellement plusieurs fois : $\boxed{\text{on en déduit}}$ $\boxed{\text{ainsi}}$ $\boxed{\text{or}}$ $\boxed{\text{donc}}$ $\boxed{\text{est équivalent à}}$

Le triangle ABC est rectangle en A .... *, d'après le théorème de Pythagore : «ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si* $AB^2 + AC^2 = BC^2$*».* .... *:*
$2^2 + AC^2 = 4^2$ *ce qui* .... $4^2 - 2^2 = AC^2$ *ce qui* .... $AC^2 = 16 - 4 = 12$. .... *:*
$AC = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$.

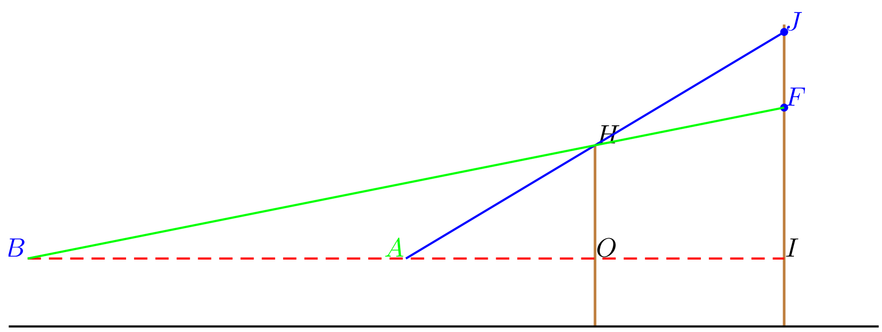
Planche n° 1 :
Correction partielle

Exercice 1



1. Voir plus haut.
2. On est dans une configuration du Théorème de Thalès :
   — les points A, D, B sont alignés, de même que les points A, E et C
   — les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
   Ainsi, par le théorème de Thalès, on a les égalités :
   $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. On en déduit $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{4}$ et donc $AE = \frac{1}{2}AC$.
   Ainsi, $AE = \frac{3}{2}$ et donc $\boxed{EC = AC - AE = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}}$.
3. On peut calculer la longueur BC par le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en A :
   $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui donne $BC^2 = 25$ et donc $BC = 5$.
   En exploitant à nouveau les égalités établies à la question précédente, on a :
   $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, soit $DE = \frac{1}{2}BC$ et donc $DE = \frac{5}{2}$
4. Il suffit de sommer toutes les longueurs. Le chemin a donc une longueur de $2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 5 = 11$.

Exercice 2



On a placé les points et les lignes de la manière suivante :
- — Juliette est au point J

— ses frères sont au point F
— le haut de la haie correspond à H
— la base de la haie à hauteur de Roméo s'appelle O
— la base de l'immeuble à hauteur de Roméo s'appelle I
— la ligne pointillée correspond à la hauteur de Roméo
— la ligne bleue correspond à la limite de ce que voit Juliette
— la ligne verte correspond à la limite de ce que voient ses frères
— on pose $x = AO$ et $y = BO$.

On cherche donc à déterminer x et y car on sait que Roméo doit se placer entre x et y mètres derrière la haie.

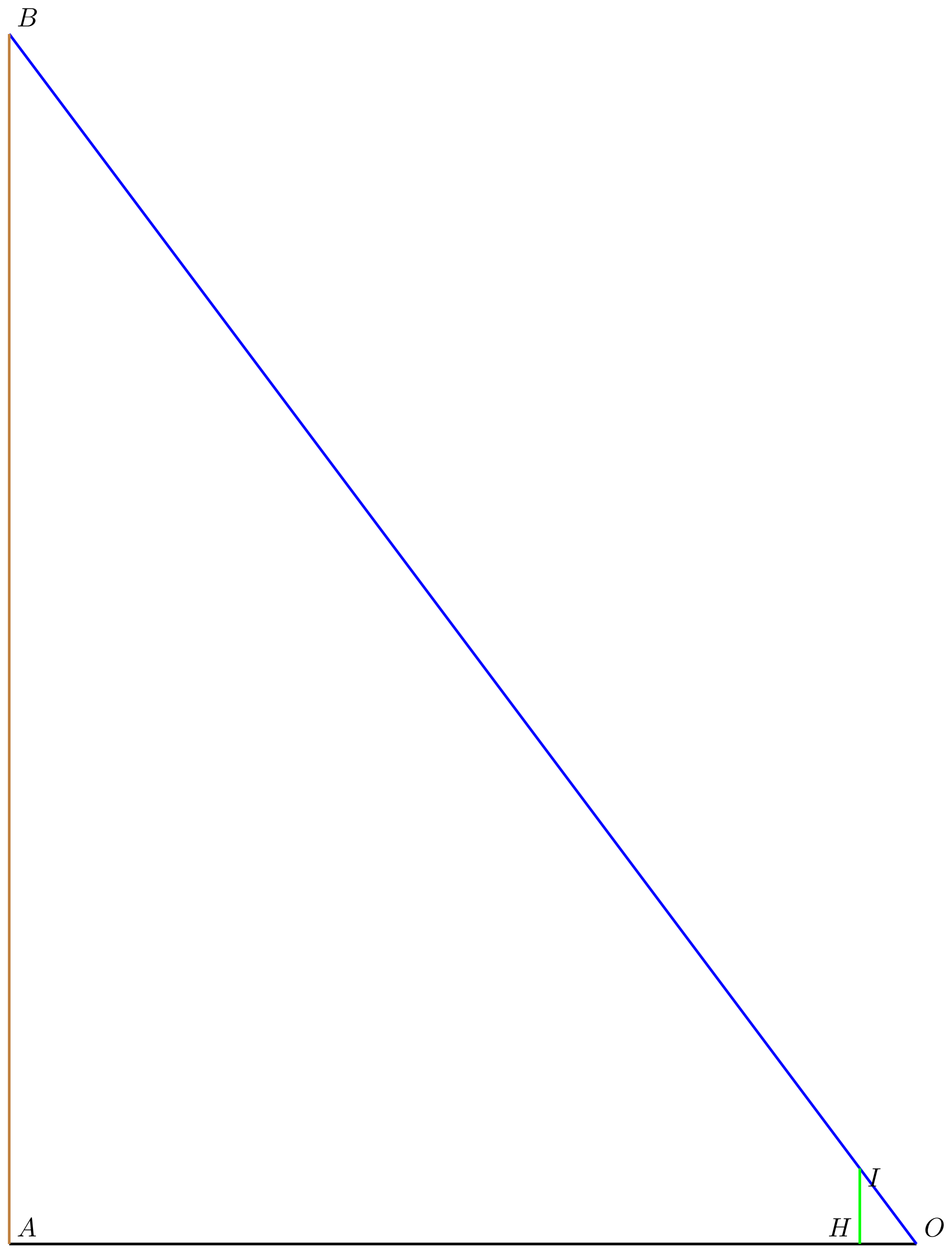
On va donc utiliser deux configurations du théorème de Thalès.

1. Dans le triangle AIJ, on a $O \in [AI]$ et $H \in [AJ]$. D'autre part, les droites (OH) et (IJ) sont parallèles. Ainsi, par le théorème de Thalès :
   $\dfrac{AO}{AI} = \dfrac{OH}{IJ}$. Or $OH = 4,8 - 1,8 = 3$ et $IJ = 7,8 - 1,8 = 6$. On obtient donc :
   $\dfrac{x}{x+10} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Un produit en croix donne :
   $2x = x + 10$, soit $2x - x = x + 10 - x$, ou encore $\boxed{x = 10}$.
2. De même, dans le triangle BIF, on a $O \in [BI]$ et et $H \in [BF]$. D'autre part, les droites (OH) et (IF) sont parallèles. Ainsi, par le théorème de Thalès :
   $\dfrac{BO}{BI} = \dfrac{OH}{IF}$. Or $IF = 5,8 - 1,8 = 4$. On obtient donc :
   $\dfrac{y}{y+10} = \dfrac{3}{4}$. Un produit en croix donne :
   $4y = 3y + 30$, soit $4y - 3y = 30 + 3y - 3y$, ou encore $\boxed{y = 30}$.

Finalement, Roméo doit se placer entre 10m et 30m derrière la haie pour être vu de Juliette sans être vu de ses frères.

Exercice 3

Un dessin vaut mieux qu'un long discours.



Voici un descriptif des points :

- le bas de l'immeuble correspond au point A
- le haut de l'immeuble correspond au point B
- le bas du bâton correspond au point H
- le haut du bâton correspond au point I
- le rayon lumineux correspond à la ligne bleue

Les points A, H et O sont alignés. De même que les points B, I et O. D'autre part, les droites (AB) et (HI) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès :
$\frac{AB}{HI} = \frac{OA}{OH}$. Ainsi, $AB = IH\frac{OA}{OH}$. La hauteur de l'immeuble est donc $\boxed{1 \times \frac{12}{0,75} = 16m}$.

Exercice 5 : Logique

a) « Soient x et y deux nombres. Si x et y sont deux nombres positifs alors $x + y$ est positif. »

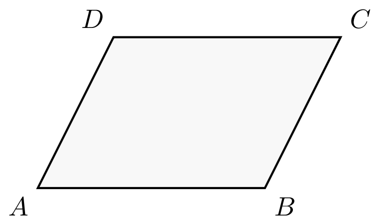
Le sens direct est vrai (la somme de deux nombres positifs est positive). La réciproque s'écrit :
« Si $x + y$ est positif alors x et y sont positifs. »
Cette phrase est fausse. Par exemple $5 + (-2)$ est positif et pourtant -2 n'est pas positif.

b) « ABC est un triangle isocèle en A implique que la médiatrice de $[BC]$ passe par A. »

Le sens direct est vrai car la médiatrice de $[BC]$ est l'ensemble des points équidistants de B et C. La réciproque s'écrit :
« La médiatrice de $[BC]$ passe par A implique que ABC est un triangle isocèle en A. »
Cette phrase est vraie. On a ainsi l'équivalence :
« ABC est un triangle isocèle en A si et seulement si la médiatrice de $[BC]$ passe par A. »

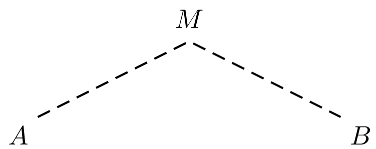
c) « $ABCD$ est un rectangle $\Longrightarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme. »

Cette phrase est vraie car tous les rectangles sont aussi des parallélogrammes. La réciproque s'écrit :
« $ABCD$ est un rectangle $\Longleftarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme. »
Cette phrase est fausse. En effet, il suffit pour cela de considérer un parallélogramme dont les deux côtés consécutifs ne sont pas perpendiculaires :



d) « Soient A, B et M trois points. Si $AM = BM$ alors M est le milieu de $[AB]$. »

Le sens direct est faux ! Il suffit pour cela de considérer le dessin :



La réciproque s'écrit :
« Si M est le milieu de $[AB]$ alors $AM = BM$. »
La réciproque est vraie.

e) « Soient a, b et x trois nombres. $a \geq b \Longrightarrow a + x \geq b + x$ »

Le sens direct est vrai. On ne change pas une inégalité en ajoutant à chaque membre le même nombre. La réciproque s'écrit :
« $a \geq b \Longleftarrow a + x \geq b + x$ »
Cette phrase est vraie. En effet, partant de l'inégalité $a + x \geq b + x$, il suffit de retrancher x à chaque membre pour retrouver l'inégalité $a \geq b$.
Il s'agit donc d'une équivalence :
« $a \geq b \Longleftrightarrow a + x \geq b + x$ ».

Planche n^{o} 2: Équations et inéquations

Exercice 1 : Résolution d'équations

Déterminer tous les nombres x qui vérifient :

a) $-7x = -4$

b) $-7 + x = 4$

c) $\frac{x}{12} = \frac{-2}{3}$

d) $4x + 3 = 5$

e) $2x + 3 = x + 4$

f) $2x + 3 = 2x + 5$

Exercice 2 : Résolutions d'inéquations

Déterminer tous les nombres x qui vérifient :

a) $-3x \geq -4$

b) $-3 + x < 4$

c) $\frac{-x}{6} \leq \frac{-2}{3}$

d) $-3x + 2 > 5$

e) $2x + 3 \geq 5x + 4$

f) $2x - 4 < \dfrac{1}{2}x + 5$

On donnera les solutions **sous forme d'intervalles.**

Exercice 3 : Achats

Le prix de quatre crayons identiques et d'une gomme est de $5,70$€. Par ailleurs, la gomme coûte 2 fois plus qu'un crayon. On note c le prix d'un crayon en €.

1. Quelle est l'équation vérifiée par c ?
2. Résoudre cette équation et trouver c.

Exercice 4 : Une mère et sa fille

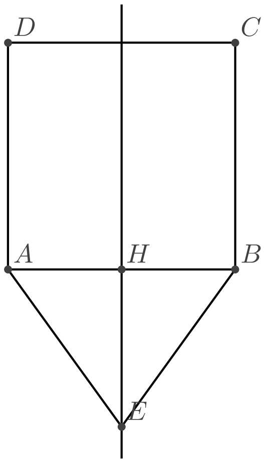
Natacha est aujourd'hui âgée de 36 ans et sa fille de 8 ans. Elle annonce à sa fille :
«À partir du moment où j'aurai moins de 3 fois ton âge, tu pourras t'acheter tes vêtements toute seule.»

1. Dans x années, quel sera l'âge de la mère, quel sera l'âge de sa fille ?
2. Quelle est l'inéquation que doit vérifier x pour que sa fille soit en âge de s'acheter ses vêtements seule ?
3. En déduire le nombre d'années que doit patienter sa fille avant d'être en âge de s'acheter ses vêtements seule.

Exercice 5 : Problème de surface

$ABCD$ est un carré de côté $3cm$.
ABE est un triangle isocèle qui n'est pas à l'intérieur du carré.
H est le point de (AB) et (EH) sont perpendiculaires.
La figure au dos illustre la situation.

On sait que le polygone $AEBCD$ a une aire de $10cm^2$. *Poser puis résoudre une équation permettant de déterminer la longueur EH.*



Exercice 6 : logique

Nadia et Boris discutent entre eux. Nadia dit à Boris :
« Si il y a un bon film à la télé alors je reste chez moi ce soir. »

Le lendemain, Boris demande à Nadia si elle est restée chez elle hier soir.

1. Que peut-on déduire de la réponse de Nadia dans les cas suivants
   a) elle répond « je suis sortie voir des amis »
   b) elle répond « je suis restée chez moi »
2. Peut-on savoir ce qu'a fait Nadia dans le cas où il n'y a pas eu de bon film à la télé ?

Exercice 7 : Moyenne

Boris a eu deux devoirs et sa moyenne est de 12. Après le troisième devoir sa moyenne passe à 14. On suppose que tous les devoirs ont le même coefficient.

Quelle est la note obtenue au troisième devoir ? *Justifier en résolvant une équation.*

Exercice 8 : À quel âge est mort Diophante [1] ?

L'épitaphe [2] de Diophante est un énigme permettant de trouver son âge. La voici :
« L'enfance de Diophante occupa un sixième de toute sa vie. Le douzième fut pris par son adolescence. Après une nouvelle période équivalente au septième de sa vie, il se maria. Cinq ans plus tard, il eut un fils. La vie de ce fils fut exactement une demie de celle de son père. Diophante mourut quatre ans après la mort de son fils. »
En notant x l'âge de Diophante à sa mort et en vous aidant d'une représentation graphique, trouver l'équation vérifiée par x et en déduire l'âge de Diophante à sa mort.

1. Mathématicien d'Alexandrie connu pour ses méthodes de résolution d'équations.
2. Inscription sur la pierre tombale.

Planche n° 2 :
Corrigé partiel

Exercice 2 : Résolutions d'inéquations

a) On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned} -3x \geq -4 &\iff \frac{-3x}{-3} \leq \frac{-4}{-3} \\ &\iff x \leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Les solutions sont l'intervalle $\left]-\infty;\ \frac{4}{3}\right]$

b) Par équivalences :

$$\begin{aligned} -3 + x < 4 &\iff -3 + x + 3 < 4 + 3 \\ &\iff x < 7 \end{aligned}$$

Les solutions sont l'intervalle $]-\infty;\ 7[$

c) Par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{-x}{6} \leq \frac{-2}{3} &\iff \frac{-x}{6} \times (-6) \geq \frac{-2}{3} \times (-6) \\ &\iff x \geq \frac{12}{3} \\ &\iff x \geq 4 \end{aligned}$$

Les solutions sont l'intervalle $[4;\ +\infty[$

d) Par équivalences :

$$\begin{aligned} -3x + 2 > 5 &\iff -3x + 2 + 3x - 5 > 5 + 3x - 5 \\ &\iff -3 > 3x \\ &\iff \frac{-3}{3} > \frac{3x}{3} \\ &\iff -1 > x \end{aligned}$$

Les solutions sont l'intervalle $]-\infty;\ -1[$

e) Par équivalences :

$$\begin{aligned} 2x + 3 \geq 5x + 4 &\iff 2x + 3 - 2x - 4 \geq 5x + 4 - 2x - 4 \\ &\iff -1 \geq 3x \\ &\iff \frac{-1}{3} \geq \frac{3x}{3} \\ &\iff -\frac{1}{3} \geq x \end{aligned}$$

Les solutions sont l'intervalle $\left]-\infty;\ -\frac{1}{3}\right]$

f) Par équivalences :

$$\begin{aligned}2x-4<\frac{1}{2}x+5 &\iff (2x-4)\times 2<\left(\frac{1}{2}x+5\right)\times 2\\ &\iff 4x-8<x+10\\ &\iff 4x-8-x+8<x+10-x+8\\ &\iff 3x<18\\ &\iff \frac{3x}{3}<\frac{18}{3}\\ &\iff x<6\end{aligned}$$

Les solutions sont l'intervalle $]-\infty;\ 6[$

Exercice 4 : Une mère et sa fille

1. Dans x années, la mère aura $36+x$ et la fille $8+x$.
2. Il faut que $36+x \leq 3(8+x)$, ce qui est la traduction de « l'âge de la mère est inférieur à trois fois l'âge de la fille. »
3. On résout l'inéquation :

$$36+x\leq 24+3x \iff 36+x-24-x\leq 24+3x-24-x \iff \frac{12}{2}\leq\frac{2x}{2}$$

Ainsi, c'est dans 6 ans, c'est à dire quand la fille aura 14 ans.

Exercice 5 : Figure géométrique

Le carré a pour aire $3\times 3=9$ cm².
Comme l'ensemble de la figure a pour aire 10 cm², on en déduit que le triangle isocèle a pour aire 1 cm².
Comme suggéré par l'énoncé, on pose $x=EH$. L'aire du triangle est donc $\frac{3x}{2}$.
On cherche donc x tel que $\frac{3x}{2}=1$, ce qui donne $x=\frac{2}{3}$ cm.

Exercice 7 : Moyenne

On note a, b et c les notes obtenues aux trois devoir. a, b et c vérifient $\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=12 & \text{car la moyenne après le second devoir}\\ \dfrac{a+b+c}{3}=14 & \text{car la moyenne après le second de}\end{cases}$

On en déduit de la première équation que $a+b=24$.

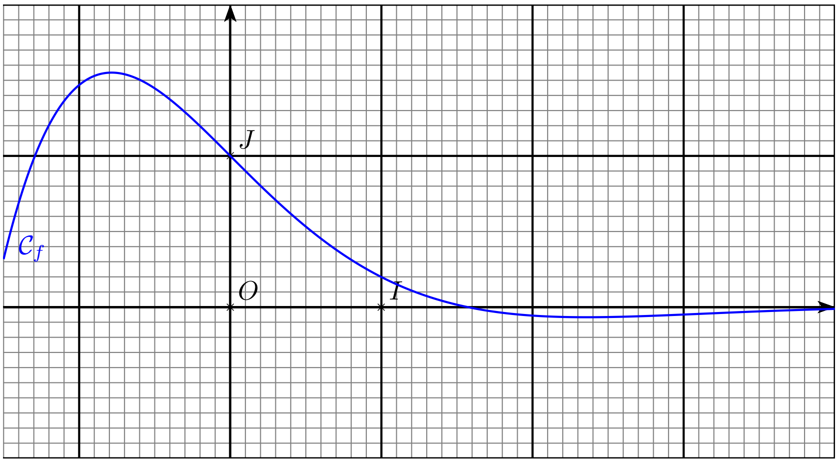
Ainsi, la seconde équation devient $\frac{24+c}{3}=14 \iff 24+c=3\times 14=42 \iff c=42-24=18$.

Planche n° 3: Représentation graphique de fonctions

Exercice 1

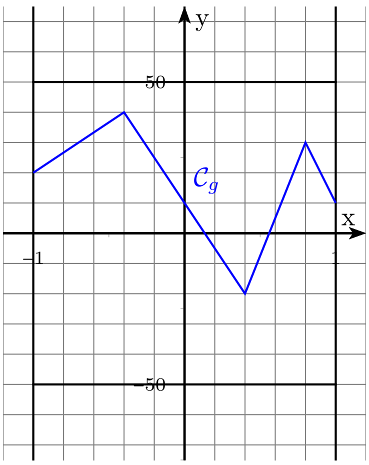
On a représenté dans le repère $(O; I; J)$ plus bas, la courbe de la fonction f définie sur $[-1,5; 4]$.

1. Lire $f(-1)$, $f(0,4)$, $f(1,2)$, $f(2)$.
2. (a) Lire les antécédents de 1 par f.
   (b) Lire les antécédents de 0 par f.
   (c) Lire les antécédents de $-0,5$ par f.



Exercice 2

On a représenté plus bas la courbe de la fonction g définie sur $[-1; 1]$.

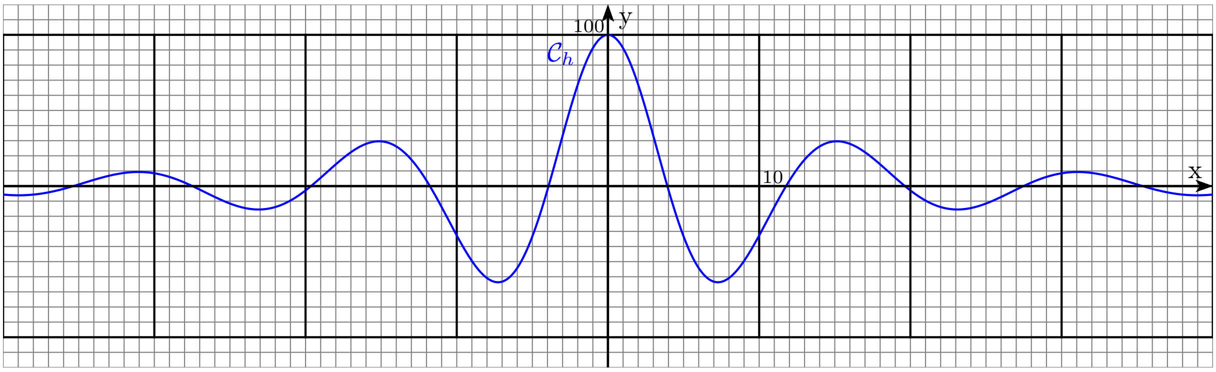


1. Lire les images de $-0,2$; $0,8$ et 1 par g.
2. (a) Lire les antécédents de 30 par g.
   (b) Lire les antécédents de -10 par g.
   (c) Lire les antécédents de 50 par g.

Exercice 3

On a représenté dans le repère $(O;x;y)$ plus bas, la courbe de la fonction h définie sur $[-4;4]$.

1. Lire les images de -10 ; 0 ; 6 ; 20 et 30 par h.
2. (a) Lire les antécédents de 100 par h.
   (b) Lire les antécédents de -100 par h.
   (c) Lire les antécédents de 70 par h.



Exercice 4

Soit la fonction $t : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.
On appelle $\mathcal{C}_t$ la courbe de t dans un repère $(O;I;J)$.

1. Parmi les point suivants dire lesquels sont sur $\mathcal{C}_t$:
   $A\,(1;1)$, $B\,(1;0)$, $C\,(-2;1)$, $D\,(0;1)$
2. Un point E de la courbe $\mathcal{C}_t$ a pour abscisse 2. Quelle est son ordonnée ?
3. Un point F de la courbe $\mathcal{C}_t$ a pour abscisse $\sqrt{2}$. Quelle est son ordonnée ?
4. Un point G de la courbe $\mathcal{C}_t$ a pour ordonnée 2. Quelle équation vérifie son abscisse notée x_G ? Résoudre cette équation.

Exercice 5

On reprend les deux fonctions définies dans les deux premiers exercices.

1. a) Résoudre $f(x) \leq 0,8$
   b) Résoudre $f(x) \geq 1$
2. a) Résoudre $g(x) > 1,2$
   b) Résoudre $g(x) < -0,3$
3. a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Dresser le tableau de signes de f.
4. a) Dresser le tableau de variations de g.
   b) Dresser le tableau de signes de g.

Planche n° 4: Configurations du plan

Pour chacun des exercices ci-dessous, il peut exister plusieurs raisonnements menant à la solution.

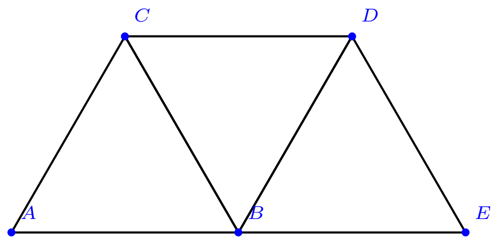
Exercice 0 : Fiches de cours.

Faire deux fiches de cours :

1. Une fiche présentant une illustration ainsi que la propriété caractéristique [3] des diagonales de chacun des quadrilatères connus : le parallélogramme, le rectangle, le losange, le carré.
2. Une fiche présentant une illustration d'un triangle ABC quelconque et donnant la définition de :
   — la médiane issue de C
   — la médiatrice de [BC]
   — la hauteur issue de B.
   On précisera également les noms des points de concours des trois médianes, des trois hauteurs, des trois médiatrices.

   Enfin, on énoncera la propriété permettant de caractériser un triangle isocèle à l'aide d'une médiatrice ainsi que la propriété caractéristique concernant le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle.

Exercice 1



Les triangles ABC, BCD et BDE sont équilatéraux et disposés comme ci-dessus.

Prouver que EDA est un triangle rectangle en D.

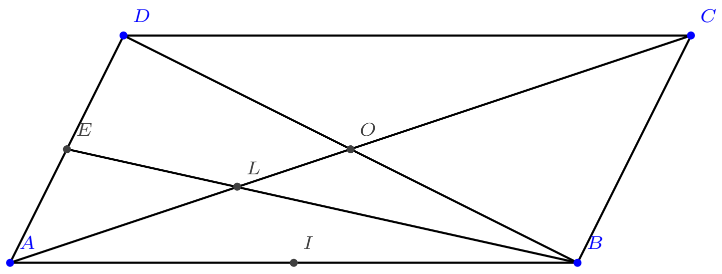
Exercice 2 ♣

ABC est un triangle isocèle en A et D est le symétrique de B par rapport à A.

Prouver que BCD est un triangle rectangle en C.

3. Une propriété caractéristique est une propriété qui est propre à un objet. Par exemple « M est situé à égale distance de B et C si et seulement si M est sur la médiatrice de [BC] » est une propriété caractéristique de la médiatrice de [BC].

Exercice 3



On suppose que :

- $ABCDE$ est un parallélogramme non aplati de centre O
- les points E et I sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[AB]$
- L est l'intersection (AC) et (EB)

Prouver que les points D, L et I sont alignés.

Exercice 4 : Démonstration des coordonnées du milieu.

Dans toute la suite $(O;\ I;\ J)$ désigne un repère quelconque.
$A\,(x_A;\ y_A)$ et $B\,(x_B;\ y_B)$ sont deux points quelconques du plan dont le milieu est M.
On va ici démontrer la formule des coordonnées du milieu d'un segment en se limitant au calcul de l'abscisse de M.

Pour cela, on trace les droites D_{Ax}, D_{Mx} et D_{Bx} parallèles à (OJ) passant respectivement par A, M et B.
On place ensuite A_x, M_x et B_x les intersections respectives de D_{Ax}, D_{Mx} et D_{Bx} avec l'axe des abscisses.
Enfin, on trace la droite D_{Ay} parallèle à (OI) passant par A et on place les points M' et B' intersections respectives de cette droite et des droites D_{Mx} et D_{Bx}.

> ⚠ Il faut ici raisonner en toute généralité sans donner de valeurs particulières aux coordonnées de A et B.

1. (a) Faire le dessin d'un tel repère, placer les points A, B de la manière la plus quelconque possible, puis placer le point M.
   (b) Réaliser la construction des droites D_{Ax}, D_{Mx}, D_{Bx}, D_{Ay} et enfin placer les points A_x, M_x, B_x, M' et B'.
2. Quelle est la nature des quadrilatères $A_xM_xM'A$ et $M_xB_xB'M'$? *Justifier.*
3. (a) Montrer que le point M' est le milieu de $[AB']$.
   (b) Déduire de ce qui précède que M_x est le milieu de $[A_xB_x]$.
4. (a) Quelles sont les abscisses des points A_x et B_x dans le repère de droite $(O;\ I)$?
   (b) En déduire l'abscisse du point M_x dans le repère de droite $(O;\ I)$.
5. Conclure quant à l'abscisse du point M dans le repère $(O;\ I;\ J)$.

Exercice 5 : Propriété des trois hauteurs d'un triangle ♣ ♣

On va ici prouver une propriété concernant les hauteurs d'un triangle.

ABC est un triangle quelconque. On construit :

— les points I, J et K milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$

— le point A' symétrique de A par rapport à I

— le point B' symétrique de B par rapport à J

— le point C' symétrique de C par rapport à K

1. (a) Prouver que le quadrilatère $ABA'C$ est un parallélogramme.

   (b) Que dire du quadrilatère $ABCB'$? *Inutile de justifier ici.*

2. (a) Déduire des deux premières questions que les points B', C et A' sont alignés.

   (b) Que représente le point C pour le segment $[A'B']$? *Justifier.*

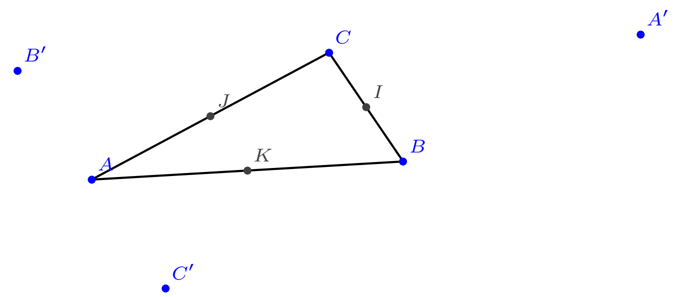
   On note (F) la droite passant par C perpendiculaire à (AB).

3. Prouver que (F) est également la médiatrice de $[A'B']$

   On note (E) la droite passant par B perpendiculaire à (AC) et (D) la droite passant par A perpendiculaire à (BC). Ainsi, (D), (E) et (F) sont les hauteurs du triangle ABC.

4. (a) Que représentent ces trois droites pour le triangle $A'B'C'$?

   (b) Conclure quant aux hauteurs du triangle ABC.



Exercice 6 : Échelle qui glisse ♣

Une échelle glisse le long d'un mur. Elle est représentée par le segment [AB] plus bas.
Le point O correspond à la base du mur et le point M est le milieu du segment [AB]. On suppose enfin que l'angle $\widehat{BOA}$ est droit.

Quelle courbe décrit le point M à mesure que l'échelle glisse ? *Justifier.*

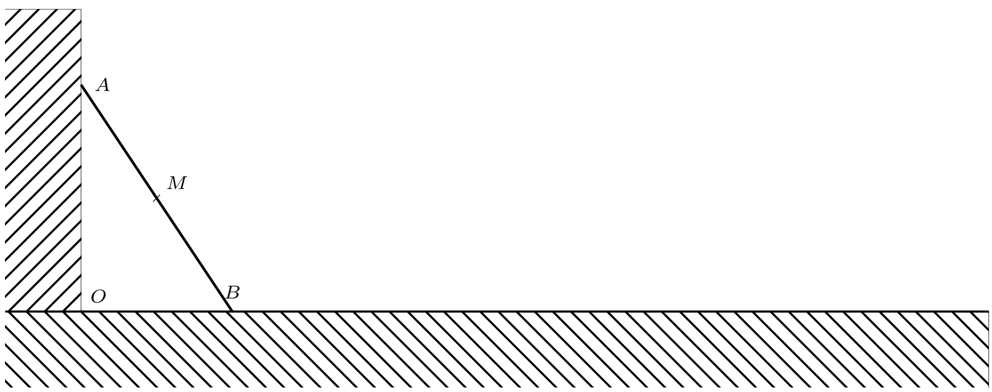
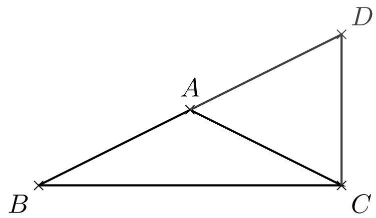


Planche n° 2 :
Correction partielle

Je ne corrige ici que les exercices du devoir maison

Exercice 2

Un petit dessin va nous aider à visualiser la situation.



On sait que $BA = AC$ car le triangle ABC est isocèle en A. D'autre part, $BA = AD$ car D est le symétrique de B par rapport à A. Ainsi, on a $AB = AC = AD$, ce qui prouve que A est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD. Or A est le milieu de $[BD]$.
Ainsi, d'après la propriété du cercle circonscrit aux triangles rectangles, le triangle BCD est rectangle en C.

Exercice 4

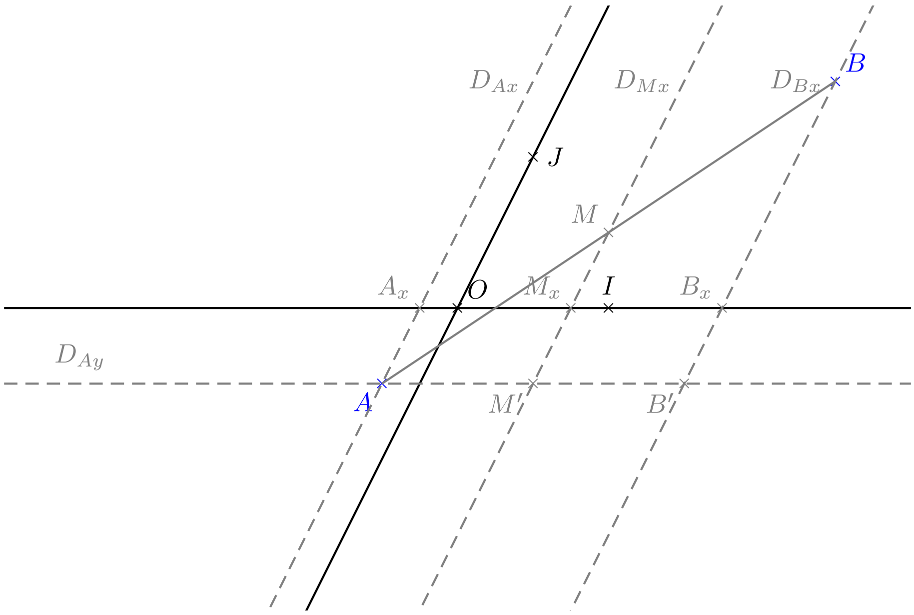
1. (a) Fait sur le dessin ci-après.
   (b) Fait sur le dessin ci-après.
2. Les quadrilatères sont des parallélogrammes. Prouvons-le pour $A_xM_xM'A$:
   L'axe des abscisses qui correspond à (A_xM_x) est, par construction, parallèle à la droite $(M'A) = D_{Ay}$. De même, les droites (A_xA) et (M_xM') sont parallèles entre elles car, par construction, toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées. Ainsi, le quadrilatère $A_xM_xM'A$ a ses côtés opposés parallèles. C'est donc un parallélogramme.
   La nature de $M_xB_xB'M'$ se prouve de manière similaire.
3. (a) D'après la question précédente, on a $A_xM_x = AM'$ et $M_xB_x = M'B'$. Il suffit donc de prouver que M' est le milieu de $[AB']$ pour conclure.
   Mais on remarque un configuration de Thalès. En effet :
   - M' appartient à $[AB']$ et M appartient à $[AB]$
   - Les droites (MM') et (BB') sont parallèles car, par construction, toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées.

   Comme M est le milieu de $[AB]$, le théorème de Thalès permet d'en déduire que M' est le milieu de $[AB']$.
   En résumé, on a bien $A_xM_x = AM' = M'B' = M_xB_x$.
   (b) D'après ce qui précède, il est évident que M_x est le milieu de $[A_xB_x]$.

(c) On applique ici la formule de l'abscisse du milieu dans un repère de droite.

Dans le repère de droite $(O;\ I)$, l'abscisse de M_x est $\dfrac{x_A + x_B}{2}$ car l'abscisse de A_x et celle de A sont, par construction, identiques ; de même que l'abscisse de B_x et celle de B.

4. Comme, par construction, l'abscisse de M_x dans le repère $(O;\ I)$ est identique à l'abscisse de M, on en déduit que l'abscisse de M est $\dfrac{x_A + x_B}{2}$.



Exercice 5

1. (a) Les diagonales du quadrilatère $ABA'C$ sont $[AA']$ et $[BC]$. Or, par construction, ces deux segments ont le même milieu : le point I. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.

   (b) Ce quadrilatère est, pour les mêmes raisons, un parallélogramme.

   (c) On va prouver que les droites (CA') et $(B'C)$ sont parallèles, ce qui permettra de conclure.

   Mais, d'après les deux questions précédentes, ces deux droites sont parallèles à (AB). Ainsi, elles sont donc bien parallèles entre elles.

   Comme (CA') et $(B'C)$ sont parallèles et ont un point commun, elles sont en fait confondues, ce qui prouve l'alignement des points B', C et A'.

   (d) Le point C est le milieu de $[A'B']$. En effet, on a $B'C = AB$ et $CA' = AB$ car les quadrilatères $ABA'C$ et $ABCB'$ sont des parallélogrammes.

   Finalement, on a bien $B'C = AB = CA'$ et comme les points sont alignés, cela permet de conclure.

2. (F) est perpendiculaire à $[A'B']$ puisque (F) est perpendiculaire à (AB) et que, d'après ce qui précède, les droites $(A'B')$ et (AB) sont parallèles. De plus, (F) passe par le milieu de $[A'B']$. C'est donc bien la médiatrice de $[A'B']$.

3. (a) Ces trois droites sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$. Elles sont donc concourantes.

   (b) Ces trois droites étant également les hauteurs ABC, on en déduit que les hauteurs de ABC sont concourantes.

Planche n° 5: Statistiques

Exercice 1 ♣

Fabriquer une série statistique qui respecte le cahier des charges suivants :

- L'effectif total est de 8
- $Q_1 = 0$, $M_e = 2$
- l'écart interquartile est de 4
- la moyenne est de 100

Exercice 2

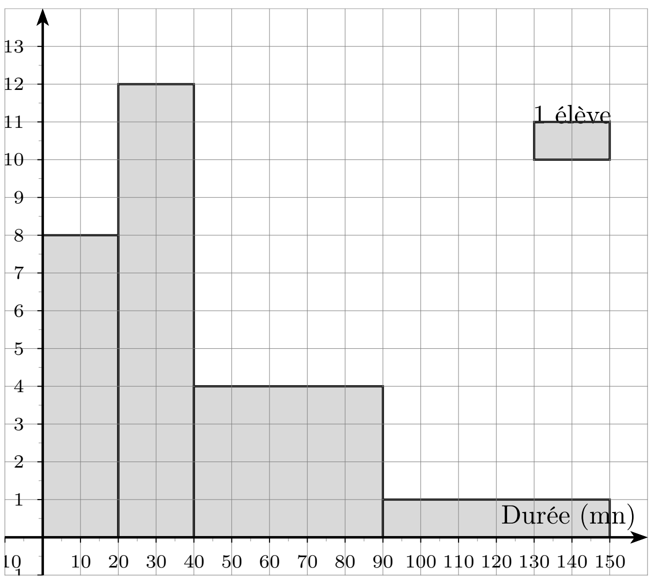
Dans une classe, on mesure le nombre d'heures passées quotidiennement dans les transports.
On résume la série par un histogramme représenté sur la page suivante.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Classe	$]0;20]$	$]20;40]$	$]40;90]$	$]90;150]$
Effectifs				
Effectifs cumulés croissants				
Fréquences cumulées croissantes				

   On arrondira les fréquences à $0,1\%$.

2. En déduire la moyenne (en mn) du temps passé dans les transports.
3. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes en utilisant le papier millimétré en annexe 1 avec une échelle adaptée.
4. Par lecture de la courbe des fréquences cumulées, déterminer :
   (a) le premier quartile
   (b) la médiane
   (c) le troisième quartile



Exercice 3

On a mesuré quotidiennement la hauteur de la houle au large de l'île d'Ouessant au cours de l'hiver 2004.

Le tableau suivant donne les fréquences de ces hauteurs.

Hauteur (m)	$]0;\ 1]$	$]1;\ 1,5]$	$]1,5;\ 2]$	$]2;\ 2,5]$	$]2,5;\ 3]$	$]3;\ 5]$	$]5;\ 6,5]$
Fréquences	6%	18%	22%	17%	13%	21%	3%
Fréquences cumulées croissantes							

1. Recopier et compléter le tableau.
2. (a) En expliquant soigneusement votre méthode, tracer l'histogramme des fréquences en annexe 2 avec une échelle adaptée.
   (b) Tracer le graphe des fréquences cumulées croissantes en annexe 2 avec une échelle adaptée.
   (c) En laissant les traits de construction apparents, déterminer Q_1, M_e, Q_3.
3. En expliquant la méthode utilisée, déterminer la hauteur moyenne de la houle au cours de l'hiver 2004.
4. Au cours de l'hiver 2005, l'écart interquartile de la hauteur de la houle était de $2,5m$ et la hauteur médiane était de $1,8m$.
   Lequel de ces deux hivers semble le plus régulier en terme de hauteur de houle ? *Préciser le critère utilisé.*

Exercice 4

On a mesuré quotidiennement en décembre 2011 les précipitations (en mm) dans la ville de Sciez en Savoie. On obtient la série suivante :

0 10,4 4,8 1,8 13,6 2,8 11,2 2 0,4 0,4 0 16,4 5 9,4 14,2 32 0,8 1,6 0,8 3,6 1,2 0 0 1,8 0 0 0 0 0 10,4 10,4

1. S'agit-il d'un caractère qualitatif en quantitatif ?
2. Quel est l'effectif de la série ?
3. Donner la moyenne, la médiane, le premier quartile, le troisième quartile.
4. La phrase suivante est-elle vraie ?
   « Les trois quarts des jours de décembre 2011, il a plu moins de 10mm. »

Nom et prénom : .... Classe : ....

Annexe 1 : Exercice 2

Annexe 2 : Exercice 3

Planche n^o 6: Probabilités

Exercice 1 : Logique

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à déterminer votre classe l'an prochain.

Écrire le contraire des évènements suivants :

(E_1) «tous les élèves font une option grec ou latin.»

(E_2) «l'un des garçons au moins sera brun aux yeux verts.»

(E_3) «toutes les filles porteront une frange.»

Exercice 2 : Choix des vêtements dans un placard

C'est l'été, et, pour s'habiller, Boris choisit aléatoirement 1 T-shirt, 1 pantalon et 1 paire de chaussure dans un placard. La composition du placard est représentée par le tableau suivant :

Vêtement	Nombre
T-shirts noirs	3
T-shirts blancs	4
Pantalons noirs	2
Pantalons toile blanc	1
Paire de baskets blanches	1
Paire de chaussures cuir noir	1

On note

T_N : « il a choisi un T-Shirt noir »

P_N : « il a choisi un pantalon noir »

C_N : « il a choisi des chaussures noires

1. Déterminer les probabilités des évènements T_N, P_N et C_N.
2. Écrire en français à quoi correspond l'évènement $\overline{C_N} \cap T_N$?
3. (a) Faire un arbre qui représente ses choix en indiquant les probabilités dans les branches.

   (b) De combien de manières différentes peut-il s'habiller ?
4. Donner les probabilités des évènements suivants :

   B : « il est habillé tout en blanc »

   M : « ses chaussures et son T-shirt sont de la même couleur »

Exercice 3 : Dalida

Dans une petite ville, certains habitants aiment les caramels, et certains habitants aiment le chocolat. On estime qu'il y a :

- 72% des habitants qui aiment le chocolat
- 23% des habitants qui aiment les caramels
- 20% des habitants n'aiment ni les caramels ni le chocolat.

Vous rencontrez un habitant au hasard et vous lui offrez une boîte de chocolats fourrés au caramel.

Quelle probabilité vous avez de lui faire vraiment plaisir ?

Indication: Commencez par calculer la probabilité de l'évènement "cette personne aime les caramels ou le chocolat" en utilisant l'évènement contraire.

Exercice 4 : Destinée

Roméo et Juliette ne se connaissent pas (encore) et habitent tous les deux Bezons.
Tous les matins, Roméo doit prendre le bus 262 en direction de La Défense et il a le choix entre les horaires suivants :

- 8h14
- 8h22
- 8h30

Tous les matins, Juliette doit elle aussi prendre le bus 262, au même arrêt que Roméo et elle a le choix entre les horaires suivants :

- 8h06
- 8h14
- 8h22

On suppose que les choix de Juliette et Roméo pour prendre leurs bus sont équiprobables et indépendants.
On suppose d'autre part que Juliette et Roméo ne peuvent pas se rencontrer par ailleurs.

1. Calculer la probabilité pour que Juliette et Roméo aient une chance de se rencontrer lundi matin.
   Indication: Vous pouvez faire un arbre à 2 niveaux correspondant au choix de bus de Roméo puis à celui de Juliette.
2. Calculer la probabilité pour que Roméo et Juliette aient une chance de se rencontrer au moins une fois dans le bus les 3 premiers jours de la semaine prochaine.
   Indication: On pourra simplifier l'univers en ne considérant, pour chaque jour, que les 2 issues E et $\overline{E}$ où E est l'évènement «Juliette et Roméo se rencontrent».
   Dans un second temps, on pourra tracer un arbre à 3 niveaux correspondant à la succession des 3 jours.

Exercice 5 : Validation d'un test

On cherche à évaluer un test de dépistage d'une maladie infectieuse.
On procède à l'évaluation sur une population de 5000 individus parmi lesquels on compte 800 malades avérés.
On soumet les individus au test de dépistage. Les résultats sont résumés dans le tableau à double entrée suivant

		MALADE		
		OUI	NON	TOTAL
RÉSULTAT DU TEST	POSITIF	793	12	
	NEGATIF			
	TOTAL	800		5000

1. Compléter les cases du tableau.
2. On choisit au hasard un individu dans la population de référence. Quelle est la probabilité
   (a) qu'il soit malade ?
   (b) qu'il soit sain ?

Les 2 questions suivantes cherchent à déterminer la fiabilité du test en mesurant les 2 types d'erreur possibles.

3. On choisit au hasard un individu malade dans la population de référence. Quelle est la probabilité que son test soit négatif ?
4. On choisit au hasard un individu testé positivement dans la population de référence. Quelle est la probabilité qu'il soit sain ?

Planche n° 7: Fonctions de référence

Exercice 1

Soit la fonction :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

1. Avec la calculatrice, reproduire et remplir le tableau suivant **avec une précision de 0,01** :

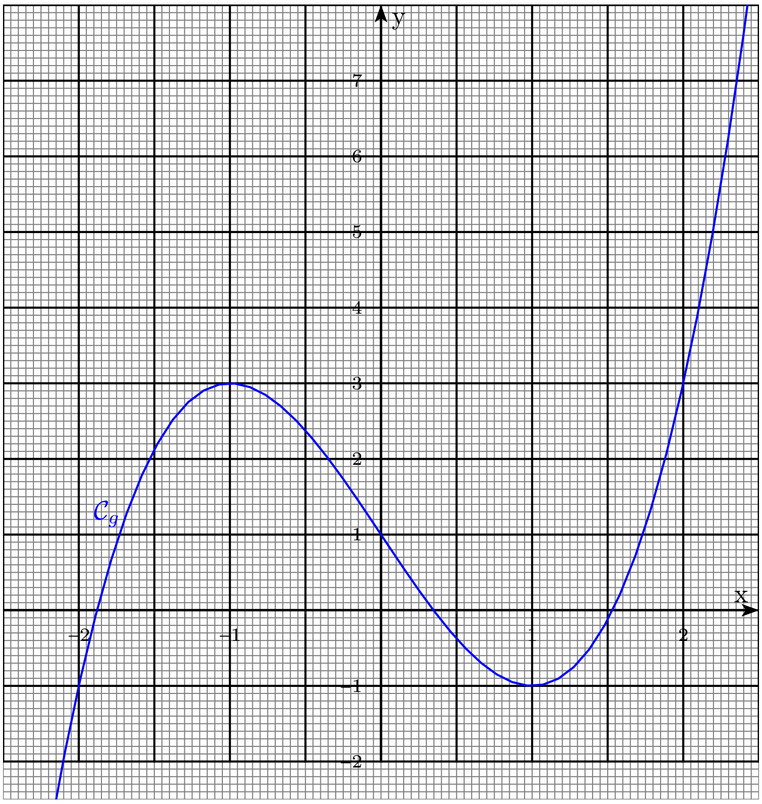
x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
images de x par g									

   On a tracé dans le repère plus bas la courbe de g.

2. Placer dans ce même repère les points $A\left(-\frac{1}{2};2\right)$ et $B\left(\frac{3}{2};-2\right)$
3. Déterminer par le calcul l'équation de la droite (AB)
4. Prouver que les abscisses x des points d'intersection de (AB) et de la courbe de g vérifient l'équation :

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

5. Déterminer la position relative de la courbe de g et de la droite (AB).
   Indication: Vérifier le calcul graphiquement.



Exercice 2

Partie A

Plus bas, on a représenté dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.
Pour les questions nécessitant une lecture graphique, on répondra avec la précision permise, c'est à dire $0,2$.

1. Déterminer :
   (a) l'image de $2,2$ par f
   (b) l'image de $-1,4$ par f
   (c) l'image de 0 par f
   (d) les éventuels antécédents de -1 par f
2. Déterminer les extrêmums de f.
3. Soient les points $A(-1;4)$ et $B(2;1)$. On notera g la fonction affine dont la droite (AB) est la courbe représentative.
   (a) placer A et B sur le graphique et tracer la droite (AB)
   (b) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
   (c) Par le calcul, déterminer pour tout x l'expression de $g(x)$.

Partie B

On admettra que l'expression de la fonction f dont la courbe est tracée s'écrit, pour tout $x \in [-2;4]$:

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4$$

1. (a) En factorisant l'expression de f, montrer que, pour tout $x \in [-2;4]$:

$$f(x) = -(x+1)(x-3)$$

   (b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$
2. En utilisant l'une des deux formes de f, résoudre $f(x) \leq 2$.
3. (a) Prouver que, pour tout $x \in [-2;4]$:

$$f(x) - g(x) = -x(x-3)$$

   (b) En déduire, en fonctions des valeurs de x, les positions relatives des 2 courbes.

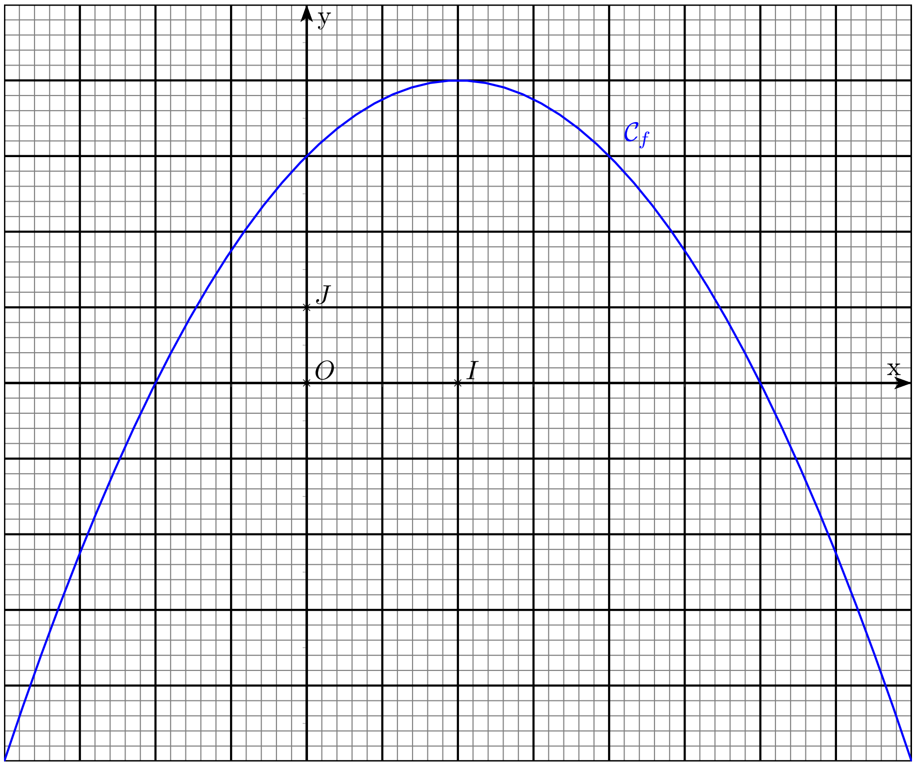

y
x
$\mathcal{C}_f$
J
O
I

Planche n^{o} 8: Fonctions et géométrie

Exercice 1

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.
Soit A le point de coordonnées $(0; 5)$ et D la droite d'équation $y = 2x$.
On cherche à déterminer la distance de la droite D au point A.
Dans toute la suite x désigne un nombre réel quelconque et M est le point de D abscisse x.

1. Sans aucune justification, tracer un tel repère sur votre feuille, placer le point A puis tracer la droite D.
2. a) Quelle est, en fonction de x, l'ordonnée du point M ?
   b) Prouver que la distance AM s'écrit, en fonction de x :
   $$\boxed{AM = \sqrt{x^2 + (2x - 5)^2}}$$
   Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre x associe la distance AM.
3. a) Déterminer le tableau des valeurs de $h(x)$ pour x allant de -2 à 6 avec un pas de $0,5$. *On arrondira à* $0,001$.
   b) Tracer à l'écran de votre calculatrice la courbe de h puis conjecturer le tableau de variation de h en déterminant *avec une précision de* $0,001$ le minimum de la fonction h (lieu / valeur).
   c) Placer sur votre repère le point M_0 sur la droite D qui réalise ce minimum.
   d) Quelle semble être la nature du triangle OAM_0 ?

Exercice 2 ♣

On considère un cône régulier :
— dont la base a pour rayon 8
— dont la hauteur vaut 24
Soit r un nombre compris entre 0 et 8 et soit le cylindre qui possède les caractéristiques suivantes :
— il partage le même axe que notre cône
— il est inclus dans le volume du cône
— sa hauteur est maximale
— sa base a pour rayon r
Déterminer, en fonction de r, le volume $V(r)$ du cylindre puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer *avec une précision de* $0,01$ la valeur de r telle que le volume du cylindre soit maximal.

Exercice 3

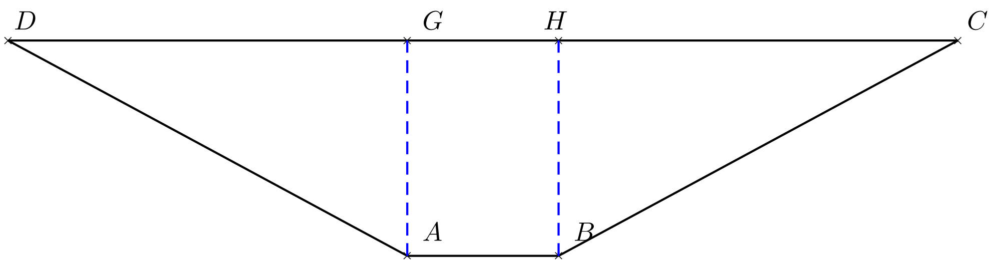
Soit $ABCD$ un trapèze. On supposera $(AB)//(CD)$ et $AB = 10cm$ et $BC = AD = 30cm$.
Soient G et H deux points de (CD) tels que $[AG]$ et $[BH]$ soient des hauteurs du trapèze.
On pose $DG = x$ (en cm) et on pose A la fonction :

$$\begin{array}{llll} A: & [0;30] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{l'aire du trapèze ABCD (en cm}^2\text{)} \end{array}$$

1. Montrer que $AG = \sqrt{900 - x^2}$.
2. En déduire l'aire du trapèze en fonction de x
3. Reproduire et remplir le tableau suivant en remplaçant les $\cdots$ par les valeurs intermédiaires *avec une précision de* $0,01$.

x	0	3	6	$\cdots$	27	30
$A(x)$						

4. En utilisant votre calculatrice, conjecturer le maximum de A (lieu / valeur) *avec une précision de* $0,01$.
5. Dresser le tableau de variation de A, *en donnant les valeurs approchées à* $0,01$.



On appelle polygone de sustentation le trapèze défini plus haut : c'est le domaine délimité par les pieds d'un individu qui se tient debout. Quand l'aire est maximale, la stabilité de l'individu est maximale. Cela permet d'expliquer pourquoi nous nous tenons toujours debout avec les pieds légèrement « en canard ».