Planche n° 7 : Fonctions de référence
Correction

Exercice 1

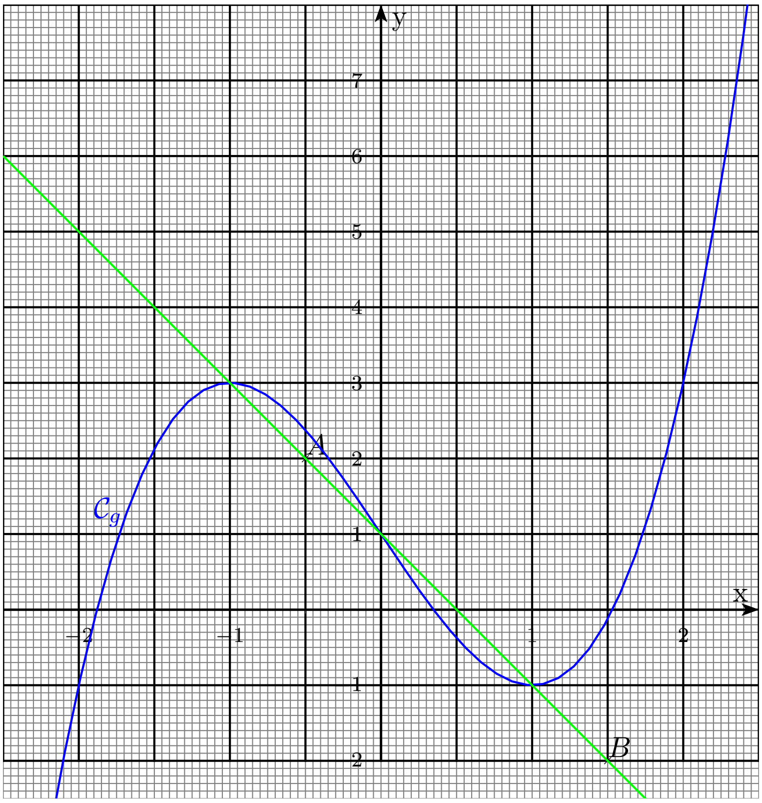
1. À l'aide de la calculatrice, on obtient :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
images de x par g	-1	$2,125$	3	$2,375$	1	$-0,375$	-1	$-0,125$	3

2. Voir plus bas.
3. Comme les abscisses de A et B sont différentes, il s'agit d'une droite affine dont on doit déterminer le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p.
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-2}{\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})} = \frac{-4}{2} = -2$.
Pour déterminer p on écrit que le point A appartient à la courbe, ce qui donne :
$y_A = mx_A + p$, soit $p = y_A - mx_A$. En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :
$p = 2 - (-2) \times (-\frac{1}{2}) = 2 - 1 = 1$.
Finalement, l'équation de la droite (AB) est $\boxed{y = -2x + 1}$.
4. L'abscisse x d'un point d'intersection de (AB) et $\mathcal{C}_g$ vérifie :
$-2x + 1 = x^3 - 3x + 1$, ce qui s'écrit de manière équivalente :
$x^3 - 3x + 1 + 2x - 1 = 0$, ou encore $x^3 - x = 0$.
Or, en développant le membre de droite, on obtient que l'équation $x(x-1)(x+1) = 0$ est équivalente à $x(x^2 - 1) = 0$, soit $x^3 - x = 0$, qui est la même équation.
Ainsi, l'abscisse x d'un point d'intersection vérifie bien :
$x(x-1)(x+1) = 0$
5. L'abscisse x d'un point de $\mathcal{C}_g$ situé « au dessus » de (AB) vérifie
$x^3 - 3x + 1 \geq -2x + 1$, ce qui est équivalent à $x^3 - 3x + 1 - (-2x + 1) \geq 0$. D'après ce qui précède, cette dernière inéquation peut se réécrire :
$x(x-1)(x+1) \geq 0$. On la résout à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x-1)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi la courbe de g est au dessus de la droite pour les abscisses $x \in [-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty[$.



Exercice 2

Partie A

Plus bas, on a représenté dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.
Pour les questions nécessitant une lecture graphique, on répondra avec la précision permise, c'est à dire $0,2$.

1. On lit graphiquement que $f(2,2) = 2,6$; $f(-1,4) = -1,6$; $f(0) = 3$ et que les antécédents de -1 sont $-1,2$ et $3,2$.
2. Maximum en $x = 1$ qui vaut 4, minimum en $x = -2$ et $x = 4$ qui vaut -5.
3. (a) Sur le graphique.

   (b) On lit que $x = 0$ et $x = 3$ sont solutions.

   (c) g est une fonction affine dont on doit calculer le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p.
   $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$ et $p = y_A - mx_A = 3$.
   Ainsi, pour tout x de l'intervalle, $g(x) = -x + 3$.

Partie B

1. (a) Pour tout x de l'intervalle :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-1)^2+4 \\ &= -\left[(x-1)^2-4\right] \\ &= -\left[(x-1)^2-2^2\right] \\ &= -\left[((x-1)-2)\left((x-1)+2\right)\right] \\ &= -(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

(b) On doit utiliser la forme factorisée de f :

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Longleftrightarrow -(x+1)(x-3)=0 \\ &\Longleftrightarrow (x+1)=0 \text{ ou } (x-3)=0 \\ &\Longleftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=3 \end{aligned}$$

2. On utilise la forme canonique et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} f(x)\leq 2 &\Longleftrightarrow -(x-1)^2+4\leq 2 \\ &\Longleftrightarrow -(x-1)^2+2\leq 0 \\ &\Longleftrightarrow -\left[(x-1)^2-\sqrt{2}^2\right]\leq 0 \\ &\Longleftrightarrow -\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)\leq 0 \end{aligned}$$

Il faut dresser le tableau de signe de $-\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)$. On détermine le signe de chacun des trois facteurs

$$\begin{aligned} \left(x-1-\sqrt{2}\right) \text{ est positif} &\Longleftrightarrow \left(x-1-\sqrt{2}\right)\geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\geq 1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \left(x-1+\sqrt{2}\right) \text{ est positif} &\Longleftrightarrow \left(x-1+\sqrt{2}\right)\geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\geq 1-\sqrt{2} \end{aligned}$$

En enfin, -1 est toujours négatif. Finalement, on obtient :

x	-2		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		4
$\left(x-1+\sqrt{2}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x-1-\sqrt{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	
$-\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La solution est donc $\left[-2;\ 1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};4\right]$.

3. (a) Pour tout x de l'intervalle :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -(x-1)^2 + 4 - [-x+3] \\ &= -\left[x^2 - 2x + 1\right] + 4 + x - 3 \\ &= -x^2 + 2x - 1 + 4 + x - 3 \\ &= -x^2 + 3x \end{aligned}$$

Ici, il y a un facteur commun x qui est évident. On obtient donc :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x(-x+3) \\ &= -x(x-3) \end{aligned}$$

Une autre manière consiste à développer $-x(x-3)$ et à prouver que l'on obtient la même expression.
Ainsi, pour tout x de l'intervalle :

$$-x(x-3) = -x^2 + 3x$$

Ce qui correspond bien à l'expression développée et simplifiée de $f(x) - g(x)$.

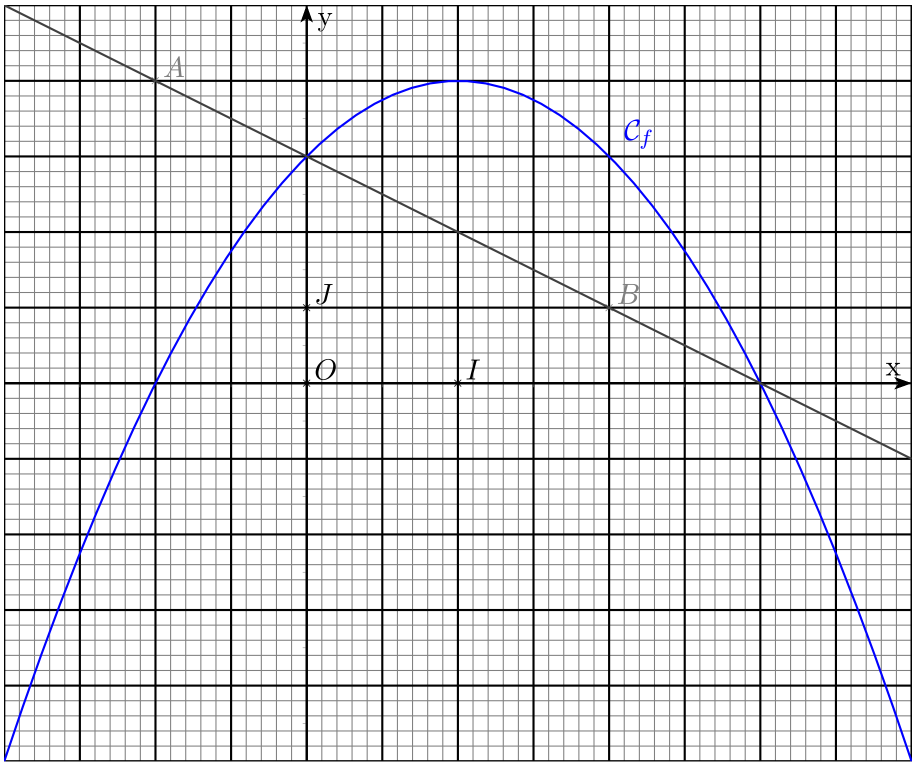
(b) Il faut déterminer le signe de $f(x) - g(x)$. En effet, la courbe de f est « au dessus » de la courbe de g si et seulement si $f(x) \geq g(x)$, c'est à dire $f(x) - g(x) \geq 0$. Pour déterminer le signe d'une expression, il faut travailler sur sa forme factorisée.
Ici, nous savons que $f(x) - g(x) = -x(x-3)$. Déterminons le signe de chacun des facteurs :

$$\begin{aligned} -x \text{ positif} &\Longleftrightarrow -x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \leq 0 \\ (x-3) \text{ positif} &\Longleftrightarrow x - 3 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \geq 3 \end{aligned}$$

Le tableau de signe de $-x(x-3)$ est donc :

x	-2		0		3		4
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, la courbe de f est au dessus de la courbe de g pour $x \in [0; 3]$, ce que l'on peut vérifier graphiquement.


y
A
$\mathcal{C}_f$
J
B
O
I
x