Devoir n° 4 : Droites et systèmes
Sujet 2, corrigé

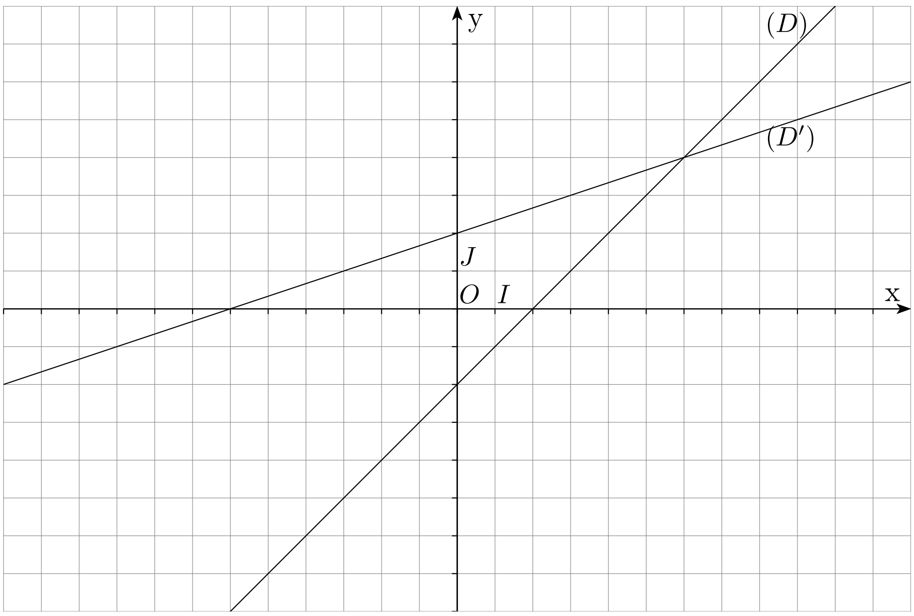
L'annexe est détachable et est **à rendre avec la copie**.
Ne pas s'acharner sur les calculs, privilégier la rédaction.

Exercice 1

On considère la droite (D) d'équation $y = x - 2$

1. Tracer dans le premier repère de l'annexe cette droite en expliquant la méthode.

Solution: L'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ est $y = -2$. Je place le point de coordonnées $(0;\ -2)$.
L'ordonnée du point d'abscisse $x = 8$ est $y = 8 - 2 = 6$. Je place le point de coordonnées $(8;\ 6)$.
Je trace la droite passant par ces deux points.



2. Déterminer **par le calcul** si les point suivants appartiennent à (D) :
$A\,(2;\ -1)$ $\quad B\,(-1;\ -3)$ $\quad C\,(-1;\ 1)$

Solution: Les coordonnées de ces points sont-elles des solutions de $y = x - 2$?
Pour A : $2 - 2 = 0 \neq -1$ donc $A \notin (D)$.
Pour B : $-1 - 2 = -3$ donc $B \in (D)$.
Pour C : $-1 - 2 = -3 \neq 1$ donc $C \notin (D)$.

3. On considère maintenant la droite (D') d'équation $y = \frac{1}{3}x + 2$.

   (a) Tracer la droite (D') sans nécessairement expliquer la méthode.

   Solution: On place le point de coordonnées $(0;\ 2)$ correspondant à l'ordonnée à l'origine.
   Quand on se déplace de $+3$ sur les abscisses, on se déplace de $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ sur les ordonnées, cela donne la direction de la droite et permet de tracer la droite.

   (b) Les droites (D) et (D') sont-elles sécantes ? Préciser le critère utilisé.

   Solution: Oui, car leurs coefficients directeurs sont différents : $1 \neq \frac{1}{3}$.

   (c) En déduire le nombre de solutions du système.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & x - 2 \\ y & = & \frac{1}{3}x + 2 \end{array} \right.$$

   Solution: Les solutions de ce système sont les coordonnées des intersections de (D) et (D'). Il y a donc une unique solution.

   (d) Lire graphiquement les éventuelles solutions de ce système. On vérifiera la validité de ces solutions par le calcul.

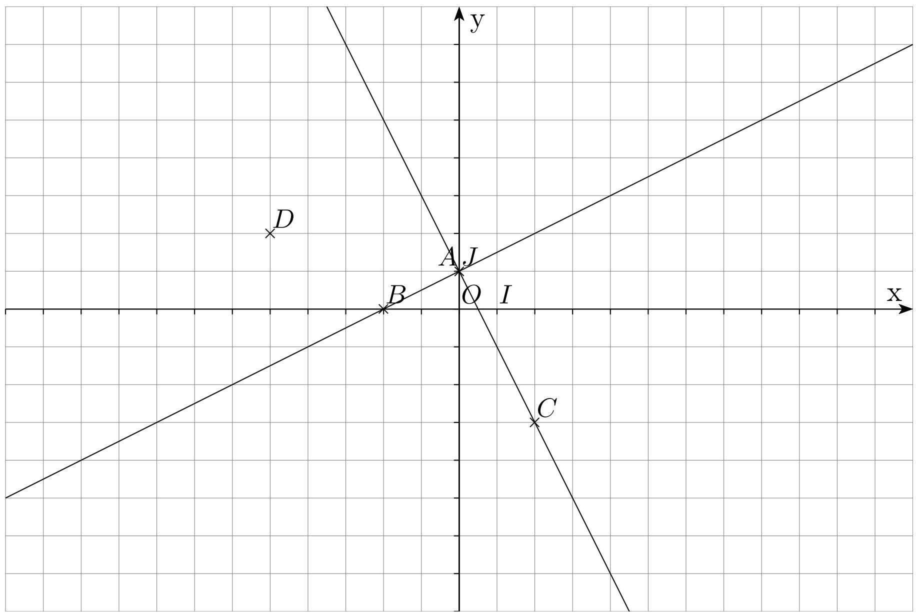
   Solution: Graphiquement, on lit la solution $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$ en regardant les coordonnées du point d'intersection.
   Quand on remplace les valeurs de x et y par 6 et 4, on se rend compte que les deux égalités sont vraies. En effet :
   $\left\{ \begin{array}{lcll} 4 & = & 6 - 2 & \text{est vraie} \\ 4 & = & \frac{1}{3} \times 6 + 2 & \text{est vraie} \end{array} \right.$

Exercice 2

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ I;\ J)$.
On considère les points $A\,(0;\ 1)$, $B\,(-2;\ 0)$, $C\,(2;\ -3)$ et $D\,(-5;\ 2)$.

1. Placer les points dans le second repère de l'annexe puis tracer les droites (AB) et (AC).

Solution:



2. (a) Déterminer l'équation de la droite (AB).

Solution: (AB) est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées car $x_a \neq x_b$.
Ainsi, on doit calculer son ordonnée à l'origine p et son coefficient directeur m.
$m = \dfrac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \dfrac{1-0}{0-(-2)} = \dfrac{1}{2}$ et $p = y_a - mx_a = 1 - \dfrac{1}{2} \times 0 = 1$.
L'équation de (AB) est donc $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + 1}$.

(b) Déterminer l'équation de la droite (AC).

Solution: (AC) est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées car $x_a \neq x_c$.
Ainsi, on doit calculer son ordonnée à l'origine p' et son coefficient directeur m'.
$m' = \dfrac{y_a - y_c}{x_a - x_c} = \dfrac{1-(-3)}{0-2} = -2$ et $p' = y_a - m'x_a = 1 - (-2) \times 0 = 1$.
L'équation de (AC) est donc $\boxed{y = -2x + 1}$.

3. (a) Les points B, C et D sont-ils alignés ?

Solution: Graphiquement, on lit que ces points ne sont pas alignés.

(b) Prouver votre conjecture.

Solution: On vérifie notre conjecture à l'aide des coefficients directeurs. Ces points sont alignés si et seulement si
$\dfrac{y_d - y_c}{x_d - x_c} = \dfrac{y_d - y_b}{x_d - x_b}$ soit $\dfrac{5}{-7} = \dfrac{2}{-3}$, ce qui est faux. Notre lecture graphique est confirmée par le calcul.

4. Prouver que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Solution: Nous allons vérifier que le triangle ABC est rectangle en A en utilisant le théorème de Pythagore.
Nous sommes dans un repère orthonormé, nous pouvons donc calculer des distances :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \\ &= 5 \\ AC^2 &= (x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2 \\ &= 20 \\ BC^2 &= (x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

On a donc bien $25 = BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui signifie que le triangle ABC est rectangle en A. Les droite (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires.

Exercice 3

Déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants puis les résoudre.

(S_1) $\left\{ \begin{array}{lcl} y &=& 3x+2 \\ y &=& -x-2 \end{array} \right.$

Solution: Les coefficients directeurs de ces deux équations de droite sont différents : $3 \neq -1$. Ce système a donc une unique solution. Résolvons le système en substituant y par $3x+2$ dans la seconde équation :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{lcl} y &=& 3x+2 \\ y &=& -x-2 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} y &=& 3x+2 \\ 3x+2 &=& -x-2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} y &=& 3x+2 \\ 4x &=& -4 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} y &=& -3+2=-1 \\ x &=& -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(S_2) $\left\{ \begin{array}{lcl} -2y+3x &=& 1 \\ -y+\dfrac{3}{2}x &=& 0 \end{array} \right.$

Solution: Pour déterminer le nombre de solutions de ce système, on va se ramener à des équations de droite.

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2y+3x & = & 1 \\ -y+\dfrac{3}{2}x & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -2y & = & -3x+1 \\ -y & = & -\dfrac{3}{2}x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2} \\ y & = & \dfrac{3}{2}x \end{array}\right.$$

Ces deux droites ont le même coefficient directeur mais des ordonnées à l'origine distinctes, ce sont donc des droites parallèles et distinctes. Il n'y a pas de solution pour ce système.