
Devoir n° 4 : Droites et systèmes

Sujet 1, corrigé

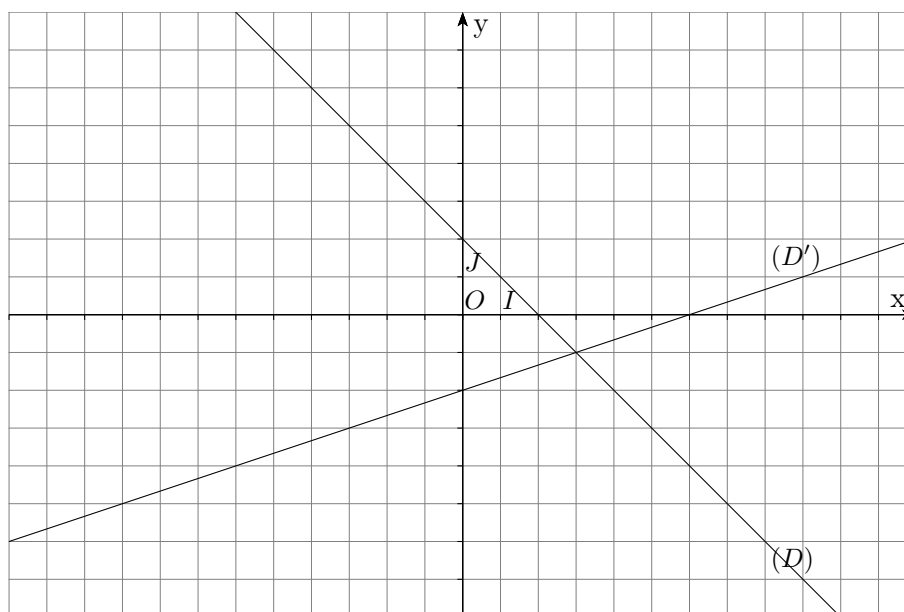
L'annexe est détachable et est à rendre avec la copie.
Ne pas s'acharner sur les calculs, privilégier la rédaction.

Exercice 1

On considère la droite (D) d'équation $y = -x + 2$

1. Tracer dans le premier repère de l'annexe cette droite en expliquant la méthode.

Solution: L'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ est $y = 2$. Je place le point de coordonnées $(0; 2)$.
L'ordonnée du point d'abscisse $x = 8$ est $y = -8 + 2 = -6$. Je place le point de coordonnées $(8; -6)$.
Je trace la droite passant par ces deux points.



2. Déterminer **par le calcul** si les points suivants appartiennent à (D) :
 $A(2; -1)$ $B(-1; 1)$ $C(1; 1)$

Solution: Les coordonnées de ces points sont-elles des solutions de $y = -x + 2$?
Pour A : $-2 + 2 = 0 \neq -1$ donc $A \notin (D)$.
Pour B : $-(-1) + 2 = 3 \neq 1$ donc $B \notin (D)$.
Pour C : $-1 + 2 = 1$ donc $C \in (D)$.

3. On considère maintenant la droite (D') d'équation $y = \frac{1}{3}x - 2$.

(a) Tracer la droite (D') sans nécessairement expliquer la méthode.

Solution: On place le point de coordonnées $(0; -2)$ correspondant à l'ordonnée à l'origine.

Quand on se déplace de $+3$ sur les abscisses, on se déplace de $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ sur les ordonnées, cela donne la direction de la droite et permet de tracer la droite.

(b) Les droites (D) et (D') sont-elles sécantes ? Préciser le critère utilisé.

Solution: Oui, car leurs coefficients directeurs sont différents : $-1 \neq \frac{1}{3}$.

(c) En déduire le nombre de solutions du système.

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

Solution: Les solutions de ce système sont les coordonnées des intersections de (D) et (D') . Il y a donc une unique solution.

(d) Lire graphiquement les éventuelles solutions de ce système. On vérifiera la validité de ces solutions par le calcul.

Solution: Graphiquement, on lit la solution $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ en regardant les coordonnées du point d'intersection.

Quand on remplace les valeurs de x et y par 3 et -1 , on se rend compte que les deux égalités sont vraies. En effet :

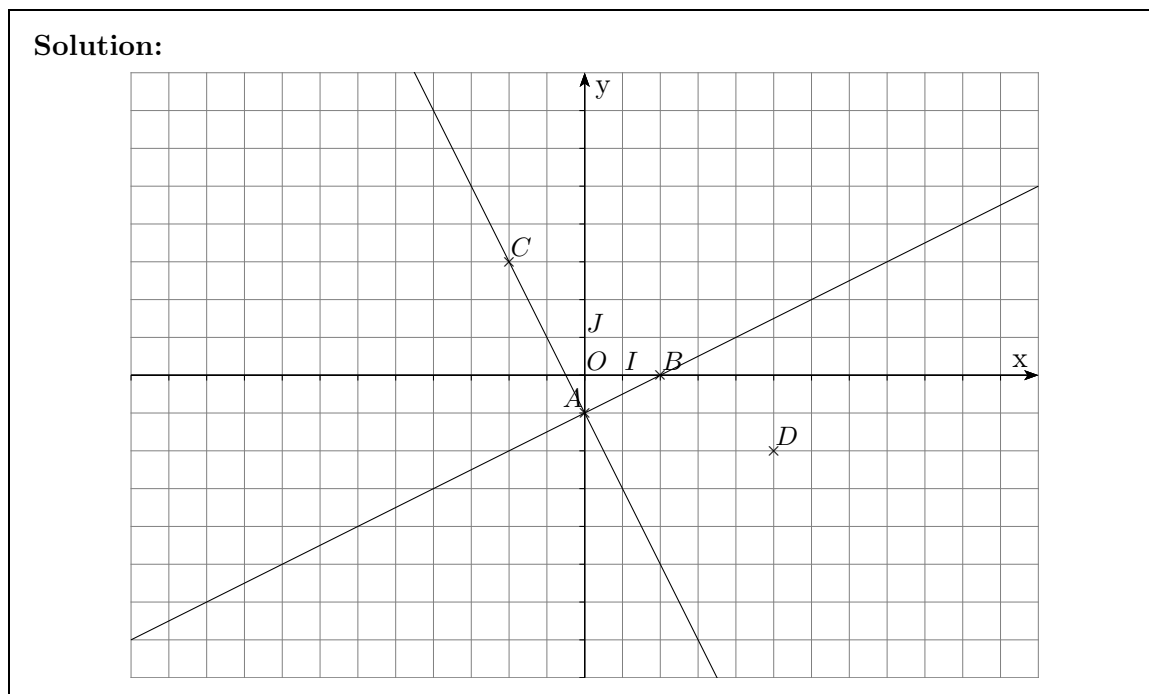
$$\begin{cases} -1 = -3 + 2 & \text{est vraie} \\ -1 = \frac{1}{3} \times 3 - 2 & \text{est vraie} \end{cases}$$

Exercice 2

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

On considère les points $A(0; -1)$, $B(2; 0)$, $C(-2; 3)$ et $D(5; -2)$.

1. Placer les points dans le second repère de l'annexe puis tracer les droites (AB) et (AC) .



2. (a) Déterminer l'équation de la droite (AB) .

Solution: (AB) est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées car $x_a \neq x_b$. Ainsi, on doit calculer son ordonnée à l'origine p et son coefficient directeur m .

$$m = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{-1 - 0}{0 - 2} = \frac{1}{2} \text{ et } p = y_a - mx_a = -1 - \frac{1}{2} \times 0 = -1.$$

L'équation de (AB) est donc $y = \frac{1}{2}x - 1$.

- (b) Déterminer l'équation de la droite (AC) .

Solution: (AC) est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées car $x_a \neq x_c$. Ainsi, on doit calculer son ordonnée à l'origine p' et son coefficient directeur m' .

$$m' = \frac{y_a - y_c}{x_a - x_c} = \frac{-1 - 3}{0 - (-2)} = -2 \text{ et } p' = y_a - m'x_a = -1 - (-2) \times 0 = -1.$$

L'équation de (AC) est donc $y = -2x - 1$.

3. (a) Les points B , C et D sont-ils alignés ?

Solution: Graphiquement, on lit que ces points ne sont pas alignés.

- (b) Prouver votre conjecture.

Solution: On vérifie notre conjecture à l'aide des coefficients directeurs. Ces points sont alignés si et seulement si $\frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} = \frac{y_d - y_b}{x_d - x_b}$ soit $\frac{5}{-7} = \frac{2}{-3}$, ce qui est faux. Notre lecture graphique est confirmée par le calcul.

4. Prouver que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Solution: Nous allons vérifier que le triangle ABC est rectangle en A en utilisant le théorème de Pythagore.
 Nous sommes dans un repère orthonormé, nous pouvons donc calculer des distances :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \\ &= 5 \\ AC^2 &= (x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2 \\ &= 20 \\ BC^2 &= (x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

On a donc bien $25 = BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui signifie que le triangle ABC est rectangle en A . Les droite (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires.

Exercice 3

Déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants puis les résoudre.

$$(S_1) \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Solution: Les coefficients directeurs de ces deux équations de droite sont différents : $3 \neq -1$. Ce système a donc une unique solution. Résolvons le système en substituant y par $3x - 2$ dans la seconde équation :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3x - 2 = -x + 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 4x = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 3 - 2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2y - 3x = 1 \\ y - \frac{3}{2}x = 0 \end{cases}$$

Solution: Pour déterminer le nombre de solutions de ce système, on va se ramener à des équations de droite.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 1 \\ y - \frac{3}{2}x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 3x + 1 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

Ces deux droites ont le même coefficient directeur mais des ordonnées à l'origine distinctes, ce sont donc des droites parallèles et distinctes. Il n'y a pas de solution pour ce système.