Exercice 6.11

Je reprends ici la correction d'un exercice au sujet duquel je n'étais pas très clair.

a) Pour tout n, $0 \leq \log(1+X_n) \leq X_n$, ce qui prouve que la suite $\log(1+X_n)$ est L^1.
D'autre part, la suite $\log(1+X_n)$ est indépendante et identiquement distribuée.
Par la loi forte des grands nombres, $\dfrac{1}{n}\log(Y_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\log(1+X_k)$, converge presque sûrement vers $E\left(\log(1+X_1)\right)$.

b) Pour tout n, $P(Z_n \neq 0) = P\left(\bigcap_{1\leq k\leq n}\{X_k \neq 0\}\right) = P(X_1 \neq 0)^n$ (en raison de l'indépendance).
Or $P(X_1 \neq 0) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$.
On en déduit que $P(Z_n \neq 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Dire que Z_n converge presque sûrement vers 0 signifie que $P\left(\lim Z_n = 0\right) = 1$.
Or on sait que $\lim P(Z_n = 0) = 1$ d'après la question précédente. La question ici que l'on doit se poser est « pourquoi peut-on inverser les symboles de limite » ?
Notons que $Z_n = 0$ correspond à l'évènement $\bigcup_{1\leq k\leq n}\{\omega /\ X_n(\omega) = 0\}$. En particulier la suite d'évènements $Z_n = 0$ est croissante et sa limite est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\omega /\ Z_n = 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{k\geq n}\{\omega /\ Z_k = 0\}$
Et comme Z_n ne prend que des valeurs entières, l'évènement $\lim Z_n = 0$ correspond aussi à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n}\{Z_k = 0\}$.
On en déduit, $P\left(\lim Z_n = 0\right) = \lim \uparrow P(Z_n = 0) = 1$

d) Si la suite Z_n converge en norme L^1, elle le fait nécessairement vers 0.
Il s'agit donc d'étudier la convergence de $E\left(|Z_n - 0|\right) = \prod_{1\leq k\leq n} E(X_1) = \lambda^n$ (par indépendance).
Ainsi, la suite Z_n converge dans L^1 vers 0 si et seulement si $\lambda < 1$.

Exercice 6.12

On note D_1 le dé à deux faces noires et D_2 le dé à quatre faces noires.
D_1 et D_2 désigneront également les évènements correspondant au choix du dé avant les lancers.

a) Pour tout n, X_n peut prendre la valeur 1 avec la probabilité $P(X_n = 1|D_1)P(D_1) + P(X_n = 1|D_2)P(D_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ ou la valeur 0 avec la probabilité $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

L'espérance de X_n est donc $\dfrac{1}{2}$.

En revanche les X_n ne sont pas indépendantes.

En effet,

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1\right) &= P\left(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1|D_1\right) P(D_1) + P\left(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1|D_2\right) P(D_2) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{18} \\ &\neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

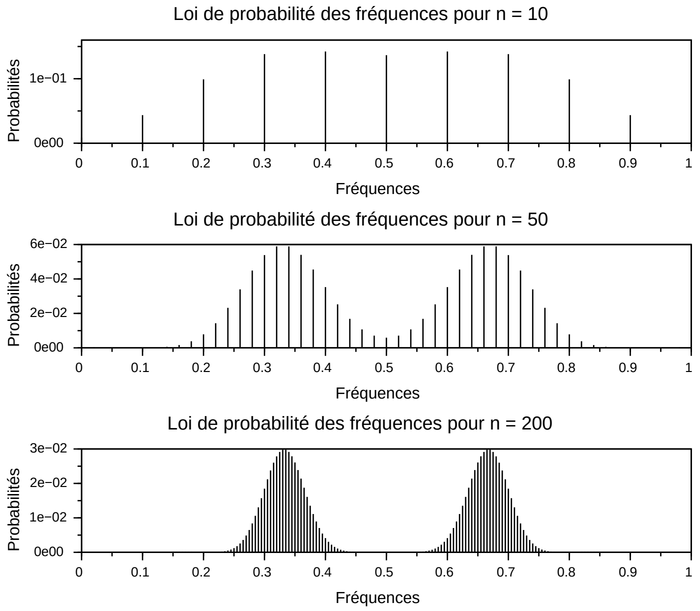
b) On pose S_n la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$,

$P(S_n = k) = P(S_n = k|D_1)P(D_1) + P(S_n = k|D_2)P(D_2) = \dfrac{1}{2}P(B_1 = k) + \dfrac{1}{2}P(B_2 = k)$ où $B_1 \sim \mathcal{B}\left(n;\ \frac{1}{3}\right)$ et $B_2 \sim \mathcal{B}\left(n;\ \frac{2}{3}\right)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on s'intéresse donc à $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right)$ et on cherche à montrer que la limite de cette probabilité n'est pas 0.

Grâce au logiciel `scilab`, on illustre plus bas les lois de probabilités de la variable $F_n = \frac{S_n}{n}$ pour différentes valeurs de n.



On va donc choisir $\varepsilon = \frac{1}{6}$ et montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}\right)$ est supérieur à un nombre qui tend vers $\dfrac{1}{4}$.
Notons que l'évènement $\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}$ contient l'évènement $\frac{S_n}{n} \leq \dfrac{1}{3}$.
On a ainsi, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}\right) \geq P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{3}\right)$.
Or, d'après ce qui précède, $P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{3}\right) \geq \frac{1}{2} P\left(\frac{B_1}{n} \leq \frac{1}{3}\right)$.
Finalement,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}\right) \geq P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{3}\right) \geq \frac{1}{2} P\left(\frac{B_1}{n} \leq \frac{1}{3}\right)$$

On va maintenant montrer que $P\left(\frac{B_1}{n} \leq \frac{1}{3}\right)$ tend vers $\frac{1}{2}$ pour conclure.
Mais le théorème de Moivre-Laplace entraîne que $\dfrac{B_1 - \frac{n}{3}}{\sqrt{n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}}$ converge (en loi) vers une loi normale centrée réduite.
En particulier $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{B_1 - \frac{n}{3}}{\sqrt{n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}} \leq 0\right) = \frac{1}{2}$.
Et comme $\frac{B_1}{n} \leq \frac{1}{3} \iff \dfrac{B_1 - \frac{n}{3}}{\sqrt{n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}} \leq 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\tfrac{B_1}{n} \leq \tfrac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, ce qui achève la démonstration.