Comment déterminer la fonction de répartition de la variable la variable $X^2\lfloor X \rfloor$ ?
Commençons par étudier la fonction $\phi : x \mapsto x^2\lfloor x \rfloor$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in [n;\ n+1[$, $\phi(x) = nx^2$.
En particulier, si $n \neq 0$, la fonction $\phi$ est strictement croissante et pour tout $n$, elle est continue sur $[n;\ n+1[$.
Enfin l'intervalle image de $[n;\ n+1[$ est inclus dans $[n^3;\ (n+1)^3[$.
Cette dernière remarque permet de prouver que, pour tout $x$, $\lfloor x \rfloor = \lfloor \phi(x)^{1/3} \rfloor$.
En raison de sa définition « par morceaux », $\phi$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle possède des sauts de continuité à gauche de $n$.
Plus précisément, $\lim\limits_{n^-} \phi = (n-1) \times n^2 \leq \phi(n) = n^3$.

Considérant $y$ quelconque, il s'agit de décrire précisément l'ensemble $\{x/\phi(x) \leq y\}$ afin de répondre au problème initial.
À partir de ce qui précède, on calcule donc $n = \lfloor y^{1/3} \rfloor$ et on distingue trois cas :

- Si $y \geq n(n+1)^2$ alors
$$\{x/\phi(x) \leq y\} = ]-\infty;\ n+1[$$
- Si $y < n(n+1)^2$ et si $n < 0$ alors
$$\{x/\phi(x) \leq y\} = \left]-\infty;\ -\sqrt{\frac{y}{n}}\right]$$
- Si $y < n(n+1)^2$ et si $n > 0$ alors
$$\{x/\phi(x) \leq y\} = \left]-\infty;\ \sqrt{\frac{y}{n}}\right]$$

Finalement, la fonction de répartition de la variable $X^2\lfloor X \rfloor$ est donné par l'expression suivante :

$$y \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{\left(\lfloor y^{1/3} \rfloor + 1\right)^-} F & \text{si } y \geq \lfloor y^{1/3} \rfloor \times \left(\lfloor y^{1/3} \rfloor + 1\right)^2 \\ F\left(\sqrt{\dfrac{y}{\lfloor y^{1/3} \rfloor}}\right) & \text{si } y < \lfloor y^{1/3} \rfloor \times \left(\lfloor y^{1/3} \rfloor + 1\right)^2 \text{ et si } \lfloor y^{1/3} \rfloor > 0 \\ F\left(-\sqrt{\dfrac{y}{\lfloor y^{1/3} \rfloor}}\right) & \text{si } y < \lfloor y^{1/3} \rfloor \times \left(\lfloor y^{1/3} \rfloor + 1\right)^2 \text{ et si } \lfloor y^{1/3} \rfloor < 0 \end{cases}$$