Calcul de la probabilité de dérangements

Pierre-Alexandre Fournié
Licence 2M231
UPMC

2017

Énoncé

Pour toute permutation σ de $[\![1;\ n]\!]$, on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de sigma, c'est à dire le nombre d'entiers i tels que $\sigma(i) = i$.
On cherche à calculer $P\left(N(\sigma) = 0\right)$ et $P\left(N(\sigma) = 1\right)$ où σ est choisie aléatoirement parmi les $n!$ permutations de $[\![1;\ n]\!]$.
Dans la suite, on appelle *dérangement* une permutation qui ne possède aucun point fixe.

Résolution

Calcul de $\mathbf{P}\left(N(\sigma) = 0\right)$

Pour tout $i \in [\![1;\ n]\!]$, on note A_i l'évènement « i est un point fixe. »
L'évènement $N\left(\sigma\right) = 0$ est le contraire de $\bigcup\limits_{i \in [\![1;\ n]\!]} A_i$.

On va donc calculer $P\left(\bigcup\limits_{i \in [\![1;\ n]\!]} A_i\right)$ en utilisant la formule de l'union généralisée :

$$P\left(\bigcup_{i \in [\![1;\ n]\!]} A_i\right) = \sum_{k \in [\![1;\ n]\!]} (-1)^{(k+1)} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

Ici, l'univers est $\Omega = \{\text{permutations de } [\![1;\ n]\!]\}$ sur lequel la probabilité est uniforme. Le cardinal de Ω est $n!$.
Notons que $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ correspond aux permutations qui laissent inchangés k nombres de $[\![1;\ n]\!]$.
Moyennant une conjugaison, ces permutations sont isomorphes aux permutations de $[\![1;\ n-k]\!]$.
Il y en a donc $(n-k)!$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$,

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

De plus, remarquons qu'il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir les indices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.
Ainsi, pour chaque $k \in [\![1;\ n]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ termes $(-1)^{(k+1)} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ dans la somme.

Finalement, la somme se réécrit :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i\in[\![1;\ n]\!]} A_i\right) &= \sum_{k\in[\![1;\ n]\!]} (-1)^{(k+1)} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} P\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&= \sum_{k\in[\![1;\ n]\!]} (-1)^{(k+1)} \binom{n}{k} \times \frac{(n-k)!}{n!}\\
&= \sum_{k\in[\![1;\ n]\!]} (-1)^{(k+1)} \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(n-k)!}{n!}\\
&= \sum_{k\in[\![1;\ n]\!]} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k!}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$P\left(N(\sigma)=0\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i\in[\![1;\ n]\!]} A_i\right) = 1 + \sum_{k\in[\![1;\ n]\!]} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k\in[\![0;\ n]\!]} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Cette dernière somme correspond à l'écriture tronquée au degré n de e^{-1}.

Calcul de P $(N(\sigma)=1)$

L'évènement $N(\sigma)=1$ est formé des permutations qui fixent uniquement un $i\in[\![1;\ n]\!]$ et qui « dérangent » tous les autres.

On peut donc l'écrire comme l'union disjointe des $A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{k\in[\![1;\ n]\!]\\ k\neq i}} A_k^c\right)$.

Utilisons maintenant les probabilités conditionnelles pour calculer

$$P\left(A_i\cap\left(\bigcap_{\substack{k\in[\![1;\ n]\!]\\ k\neq i}} A_k^c\right)\right) = P(A_i)\times P\left(A_i\cap\left(\bigcap_{\substack{k\in[\![1;\ n]\!]\\ k\neq i}} A_k^c\right)|A_i\right) = \frac{1}{n}P\left(A_i\cap\left(\bigcap_{\substack{k\in[\![1;\ n]\!]\\ k\neq i}} A_k^c\right)|A_i\right).$$

Or $P\left(A_i\cap\left(\bigcap_{\substack{k\in[\![1;\ n]\!]\\ k\neq i}} A_k^c\right)|A_i\right)$ est la probabilité des dérangements pour des permutations de $[\![1;\ n-1]\!]$.

On peut donc écrire $P\left(A_i\cap\left(\bigcap_{\substack{k\in[\![1;\ n]\!]\\ k\neq i}} A_k^c\right)\right) = \sum_{k\in[\![0;\ n-1]\!]} \frac{(-1)^k}{k!}$

Finalement, comme on a n termes identiques $\frac{1}{n}\sum_{k\in[\![0;\ n-1]\!]} \frac{(-1)^k}{k!}$ la somme se simplifie.

$$P\left(N(\sigma)=1\right) = \sum_{k\in[\![0;\ n-1]\!]} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Cette dernière somme correspond à l'écriture tronquée au degré $n-1$ de e^{-1}.