Partiel de probabilités — 2M231

Proposition de corrigé

Exercice 1

(a) Une variable suivant une loi binomiale de paramètre n et p est une somme de n Bernoulli indépendantes de paramètre p.
Chaque variable de Bernoulli a pour espérance $p \times 1 = p$ et pour variance
$p \times (1-p)^2 + p^2 \times (1-p) = p(1-p)\,[1-p+p] = p(1-p)$. Ainsi, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

(b) On note que Y prend ses valeurs dans $[\![0;\ n]\!]$.
On rappelle que pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, $P(U=k) = \frac{1}{n+1}$.
Compte-tenu de la définition de Y, on doit considérer une disjonction de cas :

$$P(Y=k|X=i) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } i=0 \text{ et } k \in [\![0;\ n]\!] \\ 1 \text{ si } i \in [\![1;\ n]\!] \text{ et } k=i \\ 0 \text{ si } i \in [\![1;\ n]\!] \text{ et } k \neq i \end{cases}$$

(c) La formule des probabilités totales nous donne la loi de Y.
Pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$,
$P(Y=k) = P(Y=k|X=0)P(X=0) + P(Y=k|X=k)P(X=k) = \frac{(1-p)^n}{n+1} + \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Et $P(Y=0) = \frac{(1-p)^n}{n+1}$.
On peut vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.
On calcule enfin l'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k \in [\![0;\ n]\!]} k \times P(Y=k) \\ &= (1-p)^n \sum_{k \in [\![1;\ n]\!]} kP(U=k) + \sum_{k \in [\![1;\ n]\!]} kP(X=k) \\ &= (1-p)^n E(U) + E(X) \\ &= \frac{n(1-p)^n}{2} + np \end{aligned}$$

Exercice 2

(a) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = (1-\theta)\theta^k$.

(ii) On note g_Y la fonction génératrice.

$$\begin{aligned} g_Y[S] &= E\left(S^Y\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} P(Y=k)S^k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (1-\theta)\theta^k S^k \\ &= \tfrac{1-\theta}{1-\theta S} \end{aligned}$$

On peut vérifier ce calcul. En prenant $S = 1$, on obtient la somme des probabilités, c'est à dire 1.

(b) (i) La densité de X est $u \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(u)$.

Sa fonction de répartition est $F_X : u \mapsto P(X \leq u)$.

Or, $P(X \leq u) = \displaystyle\int_0^u \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}$ dans le cas où $u \geq 0$ et $P(X \leq u) = 0$ sinon.

On a donc, pour tout u, $F_X(u) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(u)$.

On peut vérifier ce calcul en examinant les limites de cette fonction et son sens de variation.

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P\left(\lceil X \rceil - 1 = k\right) \\ &= P\left(\lceil X \rceil = k+1\right) \\ &= P\left(X \in]k;\ k+1]\right) \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) \end{aligned}$$

(iii) On exploite ce qui précède. Pour tout entier k :

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= \mathrm{e}^{-k\lambda} - \mathrm{e}^{(-k+1)\lambda} \\ &= \mathrm{e}^{-k\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Exercice 3

(a) D'après le théorème fondamentale de l'analyse, F est dérivable et sa dérivée ρ est strictement positive.
F est donc continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.
Elle est donc bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;\ 1[$.

(b) Pour tout nombre t, on calcule $P(X \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F(t))$ car F est strictement croissante.
Or, $P\left(U \leq F(t)\right) = \mathrm{long}\left([0;\ F(t)]\right) = F(t)$ où *long* désigne la fonction « longueur ».
Ainsi, la fonction de répartition de X est F qui est partout dérivable et de dérivée ρ.
Par suite, sa densité est bien ρ.

(c) (i) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est arctan. D'autre part, C vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+t^2}\mathrm{d}t = 1 \iff C\left[\arctan(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

On en déduit $\pi C = 1$ et donc $C = \frac{1}{\pi}$.
La fonction de répartition associée est donc

$$u \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(u) + \frac{\pi}{2}\right]$$

On peut vérifier ce calcul en examinant les limites de cette fonction et son sens de variation.

(ii) On peut vérifier rapidement que la fonction $x \mapsto \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ est la réciproque de la fonction de répartition précédente.
On est donc dans les conditions d'application de (b) pour conclure quant à la loi suivie par X.
Pour examiner la loi suivie par Y, on va déterminer, pour tout t, $P\left(Y \leq t\right) = P\left(\tan(\pi U) \leq t\right)$.
Il faut pour cela résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}\tan(\pi x) \leq t &\iff \pi x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \arctan(t) + k\pi\right] \\ &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{1}{2} + k;\ \frac{\arctan(t)}{\pi} + k\right]\end{aligned}$$

Et comme U prend ses valeurs dans $[0;\ 1]$, on se limite à étudier les cas où $k = 0$ et $k = 1$.
On procède alors par disjonction de cas en fonction du signe de t.

- Si $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}P\left(\tan(\pi U) \leq t\right) &= P\left(U \in \left[0;\ \frac{\arctan(t)}{\pi}\right] \cup \left]\frac{1}{2};\ 1\right]\right) \\ &= \mathrm{long}\left(\left[0;\ \frac{\arctan(t)}{\pi}\right] \cup \left]\frac{1}{2};\ 1\right]\right) \\ &= \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Si $t < 0$:

$$\begin{aligned}P\left(\tan(\pi U) \leq t\right) &= P\left(U \in \left]\frac{1}{2};\ \frac{\arctan(t)}{\pi} + 1\right]\right) \\ &= \mathrm{long}\left(\left]\frac{1}{2};\ \frac{\arctan(t)}{\pi} + 1\right]\right) \\ &= \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on retrouve l'expression de la fonction de répartition d'une loi de Cauchy, ce qui permet de conclure.

(d) Un petit calcul montre que X prend des valeurs positives et, pour tout nombre t positif,
$P(X \leq t) = P\left(U \leq \mathrm{e}^{-\theta t} - 1\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\theta t}$. Ainsi, $X \sim \exp(\theta)$.
Et on peut également montrer que Y prend des valeurs positives et, pour tout t positif,
$P(Y \leq t) = P\left(U \geq \mathrm{e}^{-\theta t}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\theta t}$. On a donc également $Y \sim \exp(\theta)$.