Devoir n° 2 du 19 mars 2018 — sur 10 points

Exercice 1 : Questions de cours — 4 points

1. Soit X une variable aléatoire réelle. $a < b$ désignent deux nombres.
   (a) Donner la définition de la fonction de répartition de X, notée F_X.

   Solution: C'est la fonction $u \mapsto P(X \leq u)$

   (b) Exprimer en fonction de F_X la valeur de $P(X > a)$.

   Solution:
   $$1 - F_x(a)$$

   (c) Exprimer en fonction de F_X la valeur de $P(a < X \leq b)$.

   Solution:
   $$F_x(b) - F_x(a)$$

2. X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2.
   On rappelle que les densités de X_1 et X_2 sont données par les fonctions respectives $u \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$ et $u \mapsto \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$.
   On note $M = \min(X_1;\ X_2)$.
   Enfin, t désigne un réel positif.
   (a) Calculer les valeurs de $P(X_1 > t)$ et $P(X_2 > t)$.

   Solution:
   $$P(X_1 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \qquad P(X_2 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$
   Cela s'obtient en intégrant la fonction de densité $u \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 u}$ entre t et $+\infty$.

   (b) En déduire $P(M > t)$. Quelle est la loi suivie par M ?

   Solution: $M > t$ est équivalent à $X_1 > t$ et $X_2 > t$. Comme les évènements sont indépendants, cela donne
   $$P(M > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \times \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$
   Ainsi, M suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

3. F désigne une fonction strictement croissante, continue et telle que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.
   U est une variable qui suit une loi uniforme sur $[0;\ 1]$.
   Montrer que $F^{-1}(U)$ est une variable dont la fonction de répartition est F.

Solution: Notons $Y = F^{-1}(U)$. On a, pour tout réel x,

$$P(Y \leq x) = P\left(F^{-1}(U) \leq x\right) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant des valeurs entières.
   g_X et g_Y désignent leurs fonctions génératrices.
   (a) Montrer que la fonction génératrice de $X+Y$ est la fonction $g_X \times g_Y$.

Solution: Soit n un entier naturel.
Calculons le coefficient de degré n de la fonction de répartition de $X+Y$ en utilisant l'indépendance des variables :

$$P(X+Y=n) = \sum_{0 \leq k \leq n} P(X=k \text{ et } Y=n-k) = \sum_{0 \leq k \leq n} P(X=k) \times P(Y=n-k)$$

On reconnaît ici le coefficient de degré n de la série produit $g_X \times g_Y$.

   (b) S et T sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètre λ et μ.
   Montrer que $S+T$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution: Calculons la fonction génératrice de S :

$$g_s[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda X)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda X} = \mathrm{e}^{\lambda(X-1)}$$

On en déduit $(g_S \times g_T)[X] = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(X-1)}$.
Ainsi, $S+T$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2 : Autour des lois uniformes — 4 points

1. U est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;\ 1]$
   (a) Donner la fonction de densité de U.

Solution:

$$\mathbb{1}_{[0;\ 1]}$$

   (b) Déterminer l'espérance puis la variance de U.

Solution:

$$E(U) = \int_{[0;\ 1]} t \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(U) = \int_{[0;\ 1]} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

2. $a < b$ sont deux nombres réels et M est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;\ b]$.

   En utilisant le fait que $\dfrac{M-a}{(b-a)}$ suit une loi uniforme sur $[0;\ 1]$, déterminer l'espérance de M puis sa variance en utilisant les résultats de la question 1.

   Solution: En posant $U = \dfrac{M-a}{(b-a)}$, on a $M = (b-a)U + a$. Ainsi :

   $$E(M) = (b-a)E(U) + a = \frac{1}{2}(b-a) + a = \frac{a+b}{2}$$

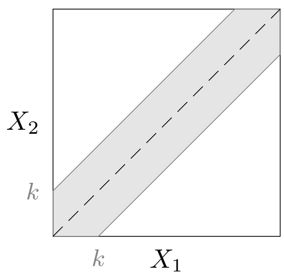
   $$V(M) = (b-a)^2 V(U) = \frac{(b-a)^3}{12}$$

3. X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes qui suivent des lois uniformes sur $[0;\ 1]$.

   Solution: On répond aux questions suivantes par du calcul d'aire.
   En effet, compte-tenu des hypothèses, il suffit de calculer des aires de domaines dans un carré de côté 1 pour déterminer des probabilités sur le couple de variables $(X_1;\ X_2)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de $|X_2 - X_1|$.

   Solution: Le domaine suivant correspond à l'évènement $|X_2 - X_1| \leq k$ avec $k \in [0;\ 1]$.

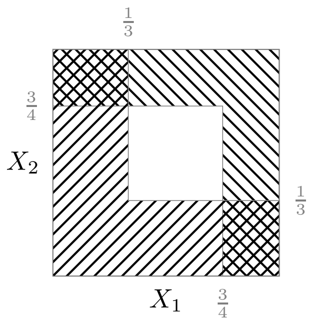


   On en déduit $P\left(|X_1;\ X_2| \leq k\right) = 1 - (k-1)^2$. La fonction de répartition est donc

   $$k \mapsto \left(1 - (k-1)^2\right) \times \mathbb{1}_{[0;\ 1]}(k)$$

   (b) Déterminer $P\left(\max(X_1;\ X_2) > \frac{3}{4} | \min(X_1;\ X_2) < \frac{1}{3}\right)$.

   Solution: Les domaines hachurés suivants correspondent aux évènements $\max(X_2;\ X_1) > \dfrac{3}{4}$ et $\min(X_2;\ X_1) < \dfrac{1}{3}$.



On en déduit

$$P\left(\max(X_2;\ X_1) > \frac{3}{4} \text{ et } \min(X_2;\ X_1) < \frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

et

$$P\left(\min(X_2;\ X_1) < \frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

D'où :

$$P\left(\max(X_1;\ X_2) > \tfrac{3}{4} |\min(X_1;\ X_2) < \tfrac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{10}$$

4. Boris et Sarah arrivent aléatoirement et de manière indépendante sur la place Saint-Michel entre 19h et 20h. Si ces deux là se rencontrent, ce sera le coup de foudre assuré.
   Ils passent chacun 15 minutes sur la place, le temps de manger un falafel, avant de repartir.
   En utilisant ce qui précède, déterminer la probabilité que le coup de foudre se produise ce jour là.

Solution: On reprend ce qui a été fait sur la variable $|X_2 - X_1|$. Le coup de foudre se produit lorsque $|X_2 - X_1| \leq \dfrac{1}{4}$, donc avec une probabilité

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

Exercice 3 : Densité de la somme de deux variables — 2 points

On rappelle que si deux variables aléatoires réelles indépendantes X_1 et X_2 admettent pour densité les fonctions f_1 et f_2 alors $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction

$$u \mapsto \int f_1(u-t)f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

1. U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[0;\ 1]$.
   Déterminer la fonction de densité de $U_2 - U_1$.

Solution: La fonction de densité de $-U_1$ est $\mathbb{1}_{[-1;\ 0]}$.
On calcule maintenant la convolution des fonctions de densité de U_2 et $-U_1$. Pour tout u, on a :

$$\begin{aligned}\int \mathbb{1}_{[0;\ 1]}(u-t)\mathbb{1}_{[-1;\ 0]}(t)\,\mathrm{d}t &= \int \mathbb{1}_{[u-1;\ u]}(t)\mathbb{1}_{[-1;\ 0]}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \mathbb{1}_{[u-1;\ u]\cap[-1;\ 0]}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= l\left([u-1;\ u]\cap[-1;\ 0]\right) \text{ avec } l \text{ la fonction « longueur. »}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de densité de $U_2 - U_1$

$$u \mapsto \begin{cases} l\left([u-1;\ u]\cap[-1;\ 0]\right) = 0 & \text{si } u > 1 \text{ ou } u < -1 \\ l\left([u-1;\ u]\cap[-1;\ 0]\right) = 1+u & \text{si } u \in [-1;0[\\ l\left([u-1;\ u]\cap[-1;\ 0]\right) = 1-u & \text{si } u \in [0;1] \end{cases}$$

2. N_1 et N_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales centrées de même écart type σ.
Déterminer la fonction de densité de $N_1 + N_2$.

Solution: Là encore, calculons le produit de convolution des deux fonctions de densité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{\frac{-(u-t)^2}{2\sigma^2}} \times \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{\frac{-(u-t)^2-t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{\frac{-u^2-2t^2+2tu}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{\frac{-u^2-2\left(t-\frac{1}{2}u\right)^2+\frac{1}{2}u^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{-u^2}{4\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{\frac{-\left(t-\frac{1}{2}u\right)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On fait un changement de variable $t \leftrightarrow s = \dfrac{t-\frac{1}{2}u}{\sigma}$ et on utilise l'égalité :

$$\int \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{\frac{-(u-t)^2}{2\sigma^2}} \times \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t &= \frac{\sigma\mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2\left(\sigma\sqrt{2}\right)^2}}}{2\pi\sigma^2}\int \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2\left(\sigma\sqrt{2}\right)^2}}}{2\pi\sigma} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2\left(\sigma\sqrt{2}\right)^2}}}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2}\sigma\right)}\end{aligned}$$

On reconnaît ici la de densité d'une variable suivant une loi $\mathcal{N}\left(0;\ \left(\sqrt{2}\sigma\right)^2\right)$.