Sorbonne Université — Licence de Mathématiques L2
UE 2M231 – Probabilités et Statistiques Élémentaires — Année 2017–2018

Partiel du 30 mars 2018

Le sujet comporte 1 page. L'épreuve dure **2 heures***. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.*

Questions de cours
(a) Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'événement de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Quand dit-on que la famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est indépendante ?
(b) Donner la densité d'une variable aléatoire X normale centrée réduite, c'est-à-dire $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(c) Donner la définition de la convergence presque sûre.
(d) Énoncer la loi forte des grands nombres.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, c'est-à-dire telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$. On définit la variable aléatoire Y par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \neq 0 \\ U & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que l'espérance et la variance de X sont données par

$$\mathbb{E}X = np \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

(b) Calculer $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$ pour deux entiers k et i dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
(c) Déterminer la loi de Y, puis son espérance.

Exercice 2.
(a) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique (à valeurs dans $\mathbb{N}$) de paramètre θ :
(i) Donner $\mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Calculer la fonction génératrice de Y.
(b) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit $Z = \lceil X \rceil - 1$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$

(i) Calculer la fonction de répartition de X.
(ii) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(Z = k)$ en fonction de la fonction de répartition de X.
(iii) En déduire que Z suite une loi géométrique dont on déterminera la paramètre.

Exercice 3. Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive et telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt.$$

(a) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
(b) Soit $F^{-1} :]0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de F, et soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable $X = F^{-1}(U)$ admet la densité ρ.
(c) *(Exemple)* La loi de Cauchy est la loi de densité ρ définie par

$$\rho(t) = \frac{C}{1 + t^2} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Déterminer la constante C telle que $\rho(t) = \frac{C}{1+t^2}$ soit bien la densité d'une loi de probabilité. Calculer la fonction de répartition associée.
(ii) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que les variables aléatoires $X = \tan(\pi(U - 1/2))$ puis $Y = \tan(\pi U)$ suivent la loi de Cauchy.
(d) *(Exemple)* Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, et soit $\theta > 0$. Déterminer la loi des variables aléatoires $X = -\frac{1}{\theta}\ln(1 - U)$ puis $Y = -\frac{1}{\theta}\ln U$.