Devoir maison

Exercice 1. Vrai ou Faux ? Justifier par une preuve ou un contre-example.
(a) Soit X et Y des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui ont même loi et f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
(b) Soient A, B et C sont trois événments : si $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ alors A, B et C sont indépendants.
(c) Si X_n converge en loi vers X alors $\mathbb{E}X_n$ converge vers $\mathbb{E}X$.
(d) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$, F_n est le fonction de répartition de X_n. Si $F_n(t)$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors X_n converge en loi.

Exercice 2. On dispose de n pétards qui sont restés un moment dans une cave humide. Le soir du 13 juillet, on essaie de tous les allumer. Chacun éclate, indépendamment des autres avec probabilité $p \in]0, 1[$. On note X le nombre de ceux qui ont éclaté. On récupère ceux qui n'ont pas éclaté. On les laisse sécher une journée et on ajoute une nouvelle mèche. Le soir du 14 juillet, on tente à nouveau de les allumer. Chacun des pétards éclate alors indépendamment des autres avec probabilité $q \in]0, 1[$. On note Y le nombre de pétards qui ont éclaté soit le 13 soit le 14 juillet.
(a) Quelle est la loi de X ?
(b) Calculer $\mathbb{P}(Y = k \mid X = \ell)$ pour $\ell \leq k \leq n$.
(c) Quelle est la loi de Y ? Pouvez vous retrouver ce résultat en considérant le nombre de pétards qui n'ont pas éclaté ?

Exercice 3. Soit un ensemble E constitué de M éléments de type 1 et $N - M$ éléments de type 2. On effectue n tirages sans remise dans E. Soit X_k la variable aléatoire définie par :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le kieme tirage dans } E \text{ donne un élément de type 1} \\ 0 & \text{si le kieme tirage dans } E \text{ donne un élément de type 2} \end{cases}$$

et soit $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
(a) Quelle est la loi de X ?
(b) Déterminer la loi de X_k, $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathrm{Var}(X_k)$.
(c) Pour tous i et j distincts dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer $\mathrm{Cov}(X_i; X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$.
(d) Retrouver $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 4. On suppose que X est une v.a.r. ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1/2 et admettant une densité continue par morceaux égale à $\rho_X : \mathbb{R} \to]0, \infty[$. On note F_X la fonction de répartition de X.
(a) Démontrer que F_X est dérivable en tout point où ρ_X est continue et qu'en un tel point t on a $F'_X(t) = \rho_X(t)$.
(b) On note $Y = 1/X$.
(i) Expliquer pourquoi Y est une variable aléatoire.
(ii) Démontrer que si F_Y est la fonction de répartition de Y on a pour tout réel $t > 0$
(c) Expliquer rapidement pourquoi Y admet une densité et la calculer en fonction de celle de X.
(d) On suppose que X suit une loi uniforme sur $[1/2, 1]$. Calculer l'espérance et la variance de Y.
(e) On suppose à présent que $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suivant une loi uniforme sur $[1/2, 1]$.
(i) Démontrer que presque sûrement la somme

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k}$$

converge vers une v.a.r. que l'on identifiera.
(ii) Expliquer pourquoi il existe un réel a pour lequel la limite suivante existe

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}(M_n - a) \in [-1, 1])?$$