# Série d'exercices n° 1. Ensembles et dénombrements

Une ⋆ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 1.1.** On possède un ensemble de lettres, un alphabet, que l'on note $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$.
**(a)** Comment interprète-t-on l'ensemble $A^n = A \times \cdots \times A$ ($n$ fois) ?
**(b)** Écrire l'ensemble des mots constitués de lettres de $A$ à partir des ensembles $A^n$ en utilisant les opérations usuelles sur les ensembles.

**Exercice 1.2.** Pour un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on note $E_Q$ l'ensemble des zéros de $Q$ : $E_Q = \{x \in \mathbb{C}; Q(x) = 0\}$.
**(a)** Que vaut $\mathrm{Card}(E_Q)$ ?
**(b)** Comment s'appelle l'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_{Q\in\mathbb{Z}[X]} E_Q$ ?
**(c)** L'union précédente est-elle disjointe ?

⋆ **Exercice 1.3.** On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
**(a)** Décrire avec des mots, sans utiliser *il existe* ni *pour tout*, les sous-ensembles de $E$ suivants :
$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{u \in E\,; u_n \in \{0,1\}\}$ ;
$B = \bigcap_{M\in\mathbb{R}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n}\{u \in E\,; u_m \geq M\}$ ;
$C = \bigcup_{M\in\mathbb{R}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{u \in E\,; u_n \geq M\}$.
**(b)** Réciproquement, faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de $E$ :
$F$ l'ensemble des suites stationaires ;
$G$ l'ensemble des suites qui convergent.

⋆ **Exercice 1.4.** Soit $A, B, C$ des parties d'un ensemble $E$. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de $E$, et si oui, préciser laquelle :

*a)* $\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B$, *b)* $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$, *c)* $|\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B|$, *d)* $\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$, *e)* $\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$, *f)* $\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

**Exercice 1.5.** Soient $X$ et $Y$ deux ensembles. Des ensembles $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$, y en a-t-il un qui est naturellement inclus dans l'autre ?

**Exercice 1.6.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et soit $f$ une application de $E$ dans $F$.
**(a)** Montrer que si $A$ et $B$ sont des sous-ensembles de $E$, alors

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B] \quad \text{et} \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B].$$

**(b)** Montrer que si $f$ est injective, alors l'inclusion ci-dessus est une égalité.
**(c)** Montrer que si $f$ n'est pas injective, alors il existe des ensembles $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$.
**(d)** Peut-on comparer $\big(f[A]\big)^c$ et $f[A^c]$ ? (Relativement à quel ensemble prend-on le complémentaire ?)

⋆ **Exercice 1.7.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et $f$ une application de $E$ dans $F$, et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de $F$
**(a)** Montrer que $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ et que $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.
**(b)** Montrer que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

**Exercice 1.8.**
**(a)** Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.
**(b)** Soit $n$ un entier positif. Montrer que tout ensemble à $n$ éléments a exactement $2^n$ parties.

**Exercice 1.9.** Montrer la formule du binôme de Newton : pour tous réels $a$ et $b$ et tout entier positif $n$, $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$. (Nous convenons que $0^0 = 1$.)

**Exercice 1.10.** Soient $n$ et $p$ des entiers positifs. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$$

et en déduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j)$.

**Exercice 1.11.** 12 chevaux sont au départ d'une course.
**(a)** Déterminer le nombre de trios possibles (sans ordre).
**(b)** Déterminer le nombre de tiercés possibles (avec ordre). (On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo.)

**Exercice 1.12.** On tire simultanément (= sans remise, sans ordre) 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de tirages donnant (i) 5 carreaux ou 5 piques ; (ii) au moins 1 roi ; (iii) au plus 1 roi ; (iv) 2 rois et 3 piques.

**Exercice 1.13.** Dans un sac de $n$ billes numérotées de 1 à $n$ on tire simultanément (= sans remise, sans ordre) $k$ billes. Déterminer (i) le nombre total de tirages ; (ii) le nombre de tirages contenant la bille 1 ; (iii) le nombre de tirages ne contenant pas la bille 1.
Que retrouve-t-on ?

**Exercice 1.14.** Soit un cube (en bois par exemple) dont on colore les faces en rouge, puis qu'on découpe en 27 petits cubes de même taille.
**(a)** Déterminer le nombre de tels petits cubes possédant : (i) 0 face rouge ; (ii) exactement 1 face rouge ; (iii) exactement 2 faces rouges ; (iv) exactement 3 faces rouges ; (v) au moins 4 faces rouges.
**(b)** On tire avec remise 3 cubes dans un sac contenant ces 27 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant : (i) exactement 3 cubes possédant exactement 2 faces rouges ; (ii) exactement 2 cubes possédant exactement 2 faces rouges ; (iii) exactement 1 cube possédant exactement 2 faces rouges ; (iv) un nombre total de faces rouges égal à 4.

☹ **Exercice 1.15.** De combien de façons peut-on mettre $n$ boules *numérotées* dans $p$ urnes ? De combien de façons peut-on mettre $n$ boules *identiques* dans $p$ urnes ?

⋆ **Exercice 1.16.** Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables ou non :
**(a)** L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers ;
**(b)** L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ;
**(c)** L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques ;
**(d)** L'ensemble des réels qui ne possèdent pas une écriture décimale unique (par exemple : $1 = 0,9999...$) ;
**(e)** L'ensemble des mots constitués de lettres d'un alphabet fini $A$ ;
**(f)** L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ ; (Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \notin f(n)\}$, où $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une bijection)
**(g)** L'ensemble $\mathcal{P}_{\text{fini}}(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ ;
**(h)** L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0,1\}$.

☹ **Exercice 1.17.** On considère l'ensemble $A \subset [0,1]$ des réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture décimale (après la virgule) ne comporte que des 1 et des 2.
**(a)** Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : \mathbb{N} \to A$. (Indication : raisonner par l'absurde et considérer $x = 0, a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)}...$ où $a_i^{(n)}$ est la $i^{\text{e}}$ décimale de $f(n)$.)
**(b)** En déduire que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
**(c)** Donner une bijection entre $[0,1]$ et l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0,1\}$.

## Série d'exercices n$^o$ 2. Événements et Probabilités

Une $\star$ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 2.1.** Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Donner un encadrement optimal pour la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Donner des exemples dans lesquels les bornes de l'encadrement sont atteintes.

$\star$ **Exercice 2.2.** On lance simultanément un dé à $n$ faces et un dé à $m$ faces.
**(a)** Proposer un espace probabilisé pour décrire cette expérience aléatoire.
**(b)** Quelle est la probabilité que le premier dé donne un résultat (strictement) supérieur au premier.

**Exercice 2.3.** Soit $n$ un entier naturel non nul. En considérant un groupe de $n$ personnes et en supposant que chaque année comporte 365 jours et que les jours de naissances sont tous équiprobables, on veut calculer la probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire.
**(a)** Proposer un espace probabilisé pour décrire cette expérience aléatoire.
**(b)** Calculer la probabilité que deux personnes au moins soient nées le même jour.
**(c)** Montrer que si $n \geq 23$, cette probabilité est supérieure à $1/2$.

$\star$ **Exercice 2.4.** On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

$\star$ **Exercice 2.5.** Soit $\Omega$ un ensemble. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur $\Omega$.
**(a)** Décrire en français et sans utiliser les expressions "quelque soit" ni "il existe" les parties suivantes de $\Omega$
$A = \bigcup_{a\in\mathbb{N}} \bigcup_{b\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega \,,\, a \leq X_n(\omega) \leq b\}\,;$
$B = \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq n} \{\omega \in \Omega \,,\, X_n(\omega) - X_m(\omega) \geq 0\}\,;$
$C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} \bigcup_{m\geq N} \left\{\omega \in \Omega \,,\, |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}\,.$
**(b)** Faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de $\Omega$

| | l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$... |
|---|---|
| $D$ | ... n'est pas bornée supérieurement , |
| $E$ | ... tend vers $+\infty$ , |
| $F$ | ... vérifie $\liminf_{n\to+\infty} X_n \leq 1$ . |

$\star$ **Exercice 2.6.** On considère une suite $(A_k)_{k\geq 1}$ d'événements. Montrer que
**(a)** si $\mathbb{P}(A_k) = 0$ pour tout $k$, alors $\mathbb{P}\big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\big) = 0\,;$
**(b)** si $\mathbb{P}(A_k) = 1$ pour tout $k$, alors $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k\geq 1} A_k\big) = 1$.

$\star$ **Exercice 2.7.** On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p$ et sur face avec probabilité $1 - p$.
**(a)** Proposer un espace des états (*i.e.* $\Omega$) pour décrire cette expérience aléatoire.
**(b)** On note $A_n$ l'événement "Il n'y a que des Face lors des $n$ premiers lancers". Interpréter l'événement $A = \bigcap_n A_n$, et calculer $\mathbb{P}(A)$.
**(c)** On note $B_i$ l'événement "Le $i^{\text{ème}}$ lancer est Pile". Interpréter l'événement $B = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{i\geq k} B_i$ et $B^c$, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

**Exercice 2.8.** On effectue des lancers successifs de dés : pour le $n^{\text{e}}$ lancer, on utilise un dé à $n$ faces équiprobables.
**(a)** Proposer un espace des états $\Omega$ pour décrire cette expérience (on passera sur $\mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$).
**(b)** On note $A_n$ l'événement "le $n^{\text{e}}$ dé tombe sur 1". On note $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Interpréter l'événement $A$ et montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
**(c)** On note $B = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$. Interpréter l'événement $B$ et montrer que $\mathbb{P}(B) = 1$.

**Exercice 2.9.** On tire un nombre dans $[0,1]$ uniformément au hasard.
**(a)** Proposer un espace probabilisé (on ne donnera pas $\mathcal{F}$ ici) pour décrire cette expérience aléatoire.
**(b)** Pour $x \in [0,1]$, on note $A_x$ l'événement "le nombre tiré vaut x". Que vaut $\mathbb{P}(A_x)$ ? Que vaut $\mathbb{P}(\bigcup_{x\in[0,1]} A_x)$ ?
**(c)** On note $B$ l'événement "le nombre tiré est algébrique". Exprimer l'événement $B$ en fonction des événements $A_x$, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.
**(d)** Un nombre calculable est un réel pour lequel il existe un algorithme (ou une machine de Turing) permettant de donner n'importe quelle décimale de ce nombre. Par exemple, $\pi$ est un nombre calculable : on peut écrire un programme `pi`, tel que `pi(`$n$`)` renvoie la $n^{\text{ème}}$ décimale de $\pi$. On note $C$ l'événement "le nombre tiré est calculable" : montrer que $\mathbb{P}(C) = 0$. En déduire qu'il existe des nombres non calculables.

**Exercice 2.10.** Un oral d'examen se déroule de la façon suivante : $n$ étudiants ont le choix entre $n$ sujets différents. Le premier étudiant choisit un sujet au hasard ; ensuite le second choisit au hasard parmi les $n-1$ sujets restants ; et ainsi de suite, jusqu'au dernier étudiant qui ne peut prendre que le dernier sujet disponible. Vous avez fait l'impasse sur un (et un seul) des sujets. En quelle position devez-vous passer pour avoir un maximum de chances de réussir (c'est-à-dire de ne pas tomber sur le sujet que vous ne connaissez pas) ?

**Exercice 2.11.** (Deux des inégalités de Bonferroni) Montrer que si les $A_n$ en question sont des évènements, alors

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{5} A_n\right) - \sum_{n=1}^{5} \mathbb{P}(A_n) + \sum_{1\leq i<j\leq 5} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \leq \sum_{1\leq i<j<k\leq 5} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

**Exercice 2.12.** (Dérangements) Pour tout un entier $n \geq 1$, on choisit au hasard (et uniformément) un objet aléatoire $\pi_n$ parmi les $n!$ permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, autrement dit parmi les bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même. On note $N(\pi_n)$ le nombre des points fixes de $\pi_n$, c'est-à-dire le nombre des points $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pour pour lesquels $\pi_n(i) = i$. Étudier les suites $(\mathbb{P}(N(\pi_n) = 0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbb{P}(N(\pi_n) = 1))_{n\in\mathbb{N}}$.

## Série d'exercices n° 3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Une ⋆ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 3.1.** On lance une pièce et un dé, tous deux non truqués. On note P, F les résultats de la pièce et $1, \ldots, 6$ les résultats du dé.
**(a)** Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant cette expérience, tel que $\mathbb{P}$ soit la probabilité uniforme sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
**(b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n$ l'événement “le résultat du dé est divisible par $n$”. Calculer $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_4)$ et $\mathbb{P}(A_2 \cup A_4)$. Les événements $A_2$ et $A_4$ sont-ils indépendants ?
**(c)** Mêmes questions avec les événements “obtenir pile et au moins 2” et “pile et un nombre pair”.

**Exercice 3.2.** Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
**(a)** Soit $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{B}$ qu'on suppose indépendants. Montrer que $A$ est indépendant de $B^c$. Montrer que $A^c$ est indépendant de $B^c$.
**(b)** Soit $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{B}$ disjoints. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ et $B$ pour qu'ils soient indépendants.
**(c)** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{B}$ pour qu'il soit indépendant de tout $B \in \mathcal{B}$.

**Exercice 3.3.** On lance deux dés. Quelle est la probabilité conditionnelle
**(a)** d'obtenir au moins un 6 sachant que les deux résultats sont différents ?
**(b)** que la somme soit égale à 6 sachant que les deux résultats sont différents ?
**(c)** que les deux résultats soient différents sachant que leur somme est égale à 6 ?
**(d)** que les deux résultats soient différents sachant que leur somme est un nombre pair ?

**Exercice 3.4.** Un oral d'examen se déroule de la façon suivante : $n$ étudiants ont le choix entre $n$ sujets différents. Le premier étudiant choisit un sujet au hasard ; ensuite le second choisit au hasard parmi les $n - 1$ sujets restants ; et ainsi de suite, jusqu'au dernier étudiant qui ne peut prendre que le dernier sujet disponible. Vous avez fait l'impasse sur un (et un seul) des sujets. En quelle position devez-vous passer pour avoir un maximum de chances de réussir (c'est-à-dire de ne pas tomber sur le sujet que vous ne connaissez pas) ?

**Exercice 3.5.** Une maladie touche 1 personne sur 10 000. On dispose d'un test de dépistage imparfait.
**(a)** On suppose qu'un test donné à une personne malade est positif dans 99 cas sur 100, et qu'un test donné à une personne saine est négatif dans 99 cas sur 100. Un patient est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?
**(b)** On suppose maintenant qu'un test donné à une personne malade (resp. saine) est positif (resp. négatif) dans $a$ cas sur 100. Pour quelle valeur de $a$ la probabilité qu'un patient testé positif soit effectivement malade est-elle égale à 90% ?

**Exercice 3.6.** Dans une population dans laquelle chaque individu est soit gaucher, soit droitier, chaque individu a une probabilité $1/10$ d'être gaucher. On pratique un test de latéralisation sur les membres de cette population. Un gaucher a une probabilité $8/10$ d'échouer au test. Un droitier a une probabilité $7/10$ de réussir le test. Quelle est la probabilité qu'une personne effectuant le test soit gauchère sachant que le test est positif ?

**Exercice 3.7.** Trois usines pharmaceutiques – A, B et C – produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total de comprimés achetés par un grossiste. Chacune de ces usines produit respectivement 5%, 6% et 3% de comprimés défectueux. Le qualiticien du grossiste reçoit une nouvelle livraison.
**(a)** Déterminer les probabilités des différentes possibilités suivantes : provenir de A et être défectueux, provenir de A et être conforme, provenir de B et être défectueux, provenir de B et être conforme, provenir de C et être défectueux, provenir de C et être conforme.
**(b)** Dans cette livraison, on prend un comprimé au hasard. Quelle est la probabilité $p_1$ pour qu'il soit défectueux ? Quelle est la probabilité $p_2$ pour qu'il soit conforme ?
**(c)** Dans cette livraison, on prend un comprimé au hasard, on constate qu'il est défectueux. Sachant cela, quelle est la probabilité (conditionnelle) qu'il ait été fabriqué dans l'usine A ?

**Exercice 3.8.** Un dé standard est lancé trois fois.
**(a)** Quelle est la probabilité
(i) que la somme soit paire ?
(ii) que la somme soit divisible par 3 ?
(iii) que la somme soit divisible par 7 ? (par 14 ?)
(iv) que le reste de la division de la la somme par 7 soit égale à 1 ?
**(b)** Quelle est la probabilité qu'au moins deux des trois lancers donnent le même résultat ?
**(c)** Déteminer la probabilité conditionnelle que la somme soit paire
(i) sachant que les trois résultats sont égaux ;
(ii) sachant que les trois résultats sont différents ;
(iii) sachant que les deux premiers lancers donnent le même résultat ;
(iv) sachant qu'au moins deux des trois lancers donnent le même résultat ;
(v) sachant que les deux premiers lancers donnent le même résultat et que le troisième lancer donne un résultat *différent* ;
(vi) sachant qu'au moins deux résultats sont différents.

**Exercice 3.9.** Une classe comporte 4 garçons et 6 filles de première année, 6 garçons et $n$ filles de deuxième année. Pour quelle valeur de $n$ les évènements "être une fille" et "être en première année" sont-ils indépendants ?

**Exercice 3.10.** Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est $p$, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. Dans le cas où le document est dans le meuble, il se trouve avec même probabilité dans chacun des sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

**Exercice 3.11.** Chacune des trois boîtes posées sur la table contient exactement deux pièces de monnaie. Dans une des trois boîtes il y a deux pièces d'or, dans une autre il y a deux pièces d'argent, dans la troisième se trouvent une pièce d'or et une pièce d'argent.

On choisit une boîte au hasard (probabilité uniforme...), on y choisit ensuite une pièce au hasard (...), et il se trouve que c'est une pièce d'or. Sachant cela, quelle est la probabilité (conditionnelle) que l'autre pièce se trouvant dans la même boite soit également en or ?

**Exercice 3.12.** Que peut-on dire d'un événement qui est indépendant de lui-même ?

**Exercice 3.13.** Un chimpanzé tape à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à écrire *Hamlet* (pas forcément du premier coup), c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite le texte de cette pièce ?

## Série d'exercices n° 4. Variables aléatoires discrètes

Une ⋆ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 4.1.** On dispose de 3 dés numérotés de 1 à 6. On parie sur un chiffre et on lance les 3 dés. Si le chiffre choisi sort 0 (resp. 1, 2, 3) fois on gagne 0 (resp. 1, 2, 5) euro. On note $X$ le gain de la partie.
**(a)** Donner la loi de $X$.
**(b)** Calculer son espérance et sa variance.

**Exercice 4.2.** On lance deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires correspondant aux résultats des deux dés.
**(a)** Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$. Calculer son espérance.
**(b)** Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = XY$. Calculer son espérance.
**(c)** Calculer les variances de $X$, $Y$, $Z$ et $W$.

**Exercice 4.3.** Calculer à l'aide de la fonction génératrice l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre $p$ et de la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**Exercice 4.4.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant la même fonction génératrice. Montrer que $X$ et $Y$ ont même loi.

**Exercice 4.5.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Montrer que la fonction génératrice de la variable $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices de $X$ et $Y$.

**Exercice 4.6.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$. Déterminer, en calculant sa fonction génératrice, la loi de $X + Y$.

**Exercice 4.7.** Soient $X, Y, Z$ trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X$ et $Y$ ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ? Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

⋆ **Exercice 4.8.** Montrer que si $U$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ alors la partie entière de $nU$ suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$.

**Exercice 4.9.** *(Absence de mémoire pour la loi géométrique)*

1. Soit $T$ une v.a. géométrique de paramètre $\theta$ ($\mathbb{P}(T = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$ pour $k \geq 1$). Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout entier naturel, puis montrer que $\mathbb{P}(T > n + p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$.
2. Soit $T$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tous entiers non nuls $n$ et $p$, on a $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et $\mathbb{P}(T > n + p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$. Montrer que $T$ suit une loi géométrique.

**Exercice 4.10.** Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit la loi uniforme sur $[n] = \{1, \dots, n\}$ (ce qu'on peut noter $X_n \sim U[n]$) : pour tout $k \in [1..n]$, $P(X_n = k) = 1/n$. Les $X_j$ sont supposées indépendantes.
**(a)** Déterminer la fonction génératrice de $X_n$ (en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, bien sûr).
**(b)** Déterminer la fonction génératrice de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
**(c)** Évaluer $\mathbb{E}(t^{Y_n})$ (par exemple pour $t \in [0, 1]$).

**Exercice 4.11.** Montrer, en utilisant les fonctions génératrices, que la somme de $n$ variables aléatoires, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p$, suit une loi binomiale de paramètres $(n, p)$.

**Exercice 4.12.** Soit $N$ une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda$ et $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre $p$, indépendantes entre elles et de $N$. Montrer que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable de Poisson de paramètre $p\lambda$.

**Exercice 4.13.** Soit $n$ fixé, et $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \lambda/n$ ; $X_i = 1$ modélise le fait que le i-ème assuré subit un sinistre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que les $X_i$ sont indépendants ; le fait que $p_n$ est petit avec $n$ modélise le fait que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, $\lambda$ représentant le "nombre d'assurés sinistrés espéré".
**(a)** Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Calculer la fonction génératrice de $Z$.
**(b)** Calculer la fonction génératrice de $X_i$.
**(c)** Calculer la fonction génératrice de $Y_n$.
**(d)** Calculer la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de la fonction génératrice de $Y_n$.
(On rappelle que $\ln(1 + u) = u(1 + \varepsilon(u))$, où $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.)
Conclusion ?

⋆ **Exercice 4.14.** *(Indépendance et indépendance deux à deux).* On suppose données, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deux variables de Bernoulli $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$, indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$ avec

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2},\ (i = 1,\ 2).$$

**(a)** Montrer que la v.a. $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante d'une part de $\varepsilon_1$, et d'autre part de $\varepsilon_2$.
**(b)** La v.a. $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est-elle indépendante du couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ?

**Exercice 4.15.** (La ruine du joueur)Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité $p$ et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$. Le but du joueur est alors de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a$, $c \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre $c$ avant la ruine).
**(a)** Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$
**(b)** Soit $a > 0$. En raisonnant sur ce qui s'est passé à la première partie, montrer la relation

$$s_c(a) = ps_c(a + 1) + qs_c(a - 1)$$

**(c)** Déduire la valeur de $s_c(a)$ suivant que $p = 1/2$ ou $p \neq 1/2$.
**(d)** Application numérique : calculer la valeur précédente avec $a = 900$ et $c = 1\,000$ puis avec $a = 100$ et $c = 20\,000$ (i) dans les cas $p = 1/2$ et (ii) dans le cas $p = 18/38$ .

**Exercice 4.16.** (Somme aléatoire) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On définit la somme aléatoire $S$ en posant, pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.
**(a)** Montrer que les fonctions génératrices de $S, T$ et $X_1$ sont liées par la relation $g_S = g_T \circ g_{X_1}$.
**(b)** Montrer que si $X_1$ et $T$ sont intégrables, alors $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X]$.
**(c)** On prend pour les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre $p$, et pour $T$ une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Quelle est la loi de $S$ ?

## Série d'exercices n° 5. Variables aléatoires à densité

Une ⋆ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 5.1.** Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle réel $]0, \pi/2[$ de densité $f_X$ et soit $Y = \sin(X)$. On suppose que $Y$ suit une loi uniforme sur $]0, 1[$. Quelle est la densité de $X$ ?

**Exercice 5.2.** Déterminer la constante $c$ de sorte que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité sur $\mathbb{R}$ :
**(a)** $\rho(x) = c\,1_{[a,b]}(x)$ où $a < b$ sont deux réels ;
**(b)** $\rho(x) = c\,e^{-ax}1_{x\geq 0}$ où $a$ est un réel strictement positif ;
**(c)** $\rho(x) = \frac{c}{1+x^2}$.

**Exercice 5.3.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. Pour quelles valeurs de $r \geq 0$ l'espérance $\mathbb{E}[|X|^r]$ est-elle finie ? Même question si la variable $X$ admet la densité $\rho(x) = \frac{c}{1+x^2}$ (pour une valeur de $c$ que l'on aura précisé dans l'exercice précédent).

**Exercice 5.4.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2}\left(1 + \frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

**Exercice 5.5.** Montrer qu'une v.a. $X$ est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est p.s. constante :
**(a)** en la supposant de carré intégrable et en calculant $\mathrm{Var}\,(X)$,
**(b)** plus généralement en déterminant sa fonction de répartition.

⋆ **Exercice 5.6.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 4]$.
**(a)** Déterminer la loi et l'espérance de $Y = -4X + 3$.
**(b)** Déterminer la loi et l'espérance de $Z = X^2$.

**Exercice 5.7.** Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X$ et $2X$ ont même fonction de répartition. Donner une équation satisfaite par la fonction de répartition de $X$ et en déduire sa loi.

⋆ **Exercice 5.8.** Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les loi des v.a. $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$. En déduire les densités de probabilité correspondantes. Que vaut $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$ ?

**Exercice 5.9.** Soit $X$ et $Y$ des variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Déterminer les lois de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

**Exercice 5.10.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle.
**(a)** Montrer que si $X$ suit une loi exponentielle alors, pour tous réels $x, h \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X > x + h \mid X > x) = \mathbb{P}(X > h). \tag{1}$$

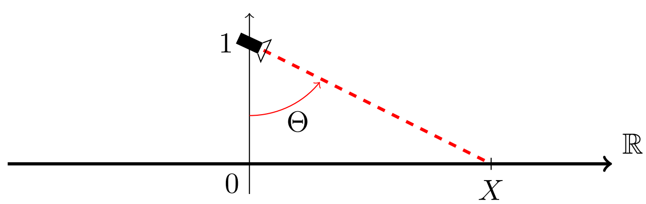
**(b)** En supposant maintenant que l'égalité (1) ci-dessus est satisfaite pour tous réels $x, h \geq 0$, déterminer la fonction de répartition de $X$, puis sa loi.

**Exercice 5.11.** Soit $X$ une v.a. réelle de fonction de répartition $F$. Trouver en fonction de $F$ les fonctions de répartition de $X^3$, $\exp(X)$, $X^2$ $\lfloor X \rfloor$, (où $\lfloor X \rfloor$ est la partie entière de $X$).

**Exercice 5.12.** Deux personnes ont décidé de se rencontrer entre 13h et 14h. La première personne arrivée au point de rendez-vous attend au maximum 15 minutes avant de partir. On veut calculer la probabilité que ces deux personnes se rencontrent effectivement. On modélise le problème de la manière suivante : soit $U_1$ et $U_2$ deux v.a. indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$ qui représentent les heures d'arrivées des deux personnes.
**(a)** Rappeler la densité de $U_2$ et en déduire la densité de $-U_2$.
**(b)** Donner la densité de $U_1 - U_2$.
**(c)** Résoudre le problème initial.

⋆ **Exercice 5.13.** Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $-\frac{1}{a} \log U$ pour $a > 0$ ?

⋆ **Exercice 5.14.** On suspend un laser à 1 m au dessus du sol. L'angle qu'il forme avec la verticale est aléatoire, notée $\Theta$, et suit la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note $X$ le point marqué au sol par le laser (voir la Figure ci-dessous). Donner la densité de la loi de $X$.




**Exercice 5.15.** On tire deux points au hasard sur le segment $[0, 1]$, indépendamment l'un de l'autre. On constate que le plus petit des deux nombres obtenus est inférieur à $1/3$. Sachant cela, quelle est la probabilité (conditionnelle) que le plus grand soit supérieur à $3/4$ ?

**Exercice 5.16.** Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle réel $]0, \pi/2[$ de densité $f_X$ et soit $Y = \sin(X)$. On suppose que $Y$ suit une loi uniforme sur $]0, 1[$. Quelle est la densité de $X$ ?

**Exercice 5.17.** Soient $X$ et $Y$ deux variables indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ quand :

1. $X$ et $Y$ sont deux variables géométriques, de paramètre (commun) $\theta$ ;
2. $X$ et $Y$ suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ ;
3. $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.

⋆ **Exercice 5.18.** Soient $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Z = XY$.

**Exercice 5.19.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner une majoration de $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{100} > 200)$.

## Série d'exercices n° 6. Convergence de suites de variables aléatoires

Une ⋆ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 6.1.** Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes, et soit $X = \min\{X_1, X_2\}$, $Y = \max\{X_1, X_2\}$.
**(a)** Montrer que les événements $\{X > x\}$ et $\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}$ sont égaux pour tout réel $x$.
**(b)** Montrer un résultat analogue pour l'événement $\{Y \leq y\}$ avec $y$ réel.
**(c)** Pour des réels $x$ et $y$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(\{X > x\} \cap \{Y \leq y\})$ en fonction des fonctions de répartition $F_1$ et $F_2$ de $X_1$ et $X_2$ respectivement.
**(d)** En déduire les fonctions de répartition respectives de $X$ et $Y$.

⋆ **Exercice 6.2.** Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

**(a)** Montrer que $(X_n)_n$ tend vers 0 en probabilité.
**(b)** Soit $A$ l'événement $\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} \{X_n = 1\}$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
**(c)** En déduire que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 0$.

**Exercice 6.3.** On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, avec $\theta > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
**(a)** Pour $\varepsilon > 0$, calculer $\mathbb{P}(M_n < \theta - \varepsilon)$.
**(b)** En déduire que $M_n$ converge en probabilité vers $\theta$ quand $n \to +\infty$.

⋆ **Exercice 6.4.**
**(a)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) = 0$.
**(b)** Montrer que

$$\{|X - Y| = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{|X - Y| \leq 1/k\Big\}.$$

**(c)** Conclure.

⋆ **Exercice 6.5.** Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$ et pour tout entier $n$ soit $X_n = (-1)^n X$. Montrer que $X_n$ a la même loi que $X$ mais que $X_n$ ne converge pas en probabilité vers $X$.

**Exercice 6.6.** Soient $\{X_n\}_{n\geq 0}$ des variables aléatoires telles que pour tout entier naturel $n$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n^2 \in \mathbb{R}_+^\star$. On suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que $\mu_n \to \mu$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $X_n$ converge en loi vers $X$ quand $n \to +\infty$ avec $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

**Exercice 6.7.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telle que pour $n \geq 1$, $X_n$ est de loi binomiale de paramètres $n$ et $p_n$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Soit $X$ une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda$.
**(a)** Calculer les fonctions caractéristiques de $X_n$ et de $X$.
**(b)** En déduire que $X_n$ converge en loi vers $X$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice 6.8.** On lance un dé à 6 faces non truqué et pour $i \geq 1$, on appelle $X_i$ la v.a. donnant le numéro obtenu au $i$-ème lancer.
**(a)** Déterminer la limite, si elle existe, de $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ lorsque $n \to \infty$.
**(b)** Quelle est la limite, quand $n \to +\infty$, de la proportion de faces paires obtenues en $n$ lancers ?

**Exercice 6.9.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}$$

converge en probabilité vers 1 quand $n \to +\infty$.

$\star$ **Exercice 6.10.** *(Problème du collecteur de coupons).* Une marque de céréales offre, dans chaque paquet, une pièce d'un puzzle en contenant au total $k$. Chaque semaine, la pièce est prise au hasard parmi les $k$ pièces possibles, indépendamment des semaines précédentes. Un collectionneur achète chaque semaine un paquet, et voudrait savoir com- bien de semaines il lui faudra pour pouvoir finir le puzzle.

On note $A_i^n$ l'événement "la pièce n$^{\text{o}}$ $i$ n'a pas été tirée lors des $n$ premières semaines".
**(a)** Calculer $\mathbb{P}(A_i^n)$.
**(b)** On note $X_n$ le nombre de pièces du puzzle encore manquantes après $n$ semaines. En écrivant $X_n = \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{A_i^n}$ (que l'on justifiera), calculer $\mathbb{E}[X_n]$. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] \to 0$ quand $n \to \infty$.
**(c)** On note $T$ le nombre de semaines nécessaires pour compléter la collection. Montrer que

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq k\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^n.$$

**(d)** En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\big(T > (1+\varepsilon)k\ln k\big) \to 0\,, \qquad \text{quand } k \to \infty\,.$$

**Exercice 6.11.** Soit $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de variables aléatoires entières, indépendantes suivants la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. On pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^n (1+X_k), \qquad \text{et} \qquad Z_n = \prod_{k=1}^n X_k.$$

**(a)** Etudier la convergence presque sûre de $\frac{1}{n}\log Y_n$.
**(b)** Calculer $\mathbb{P}\left(Z_n \neq 0\right)$.
**(c)** Montrer que $Z_n$ converge presque sûrement vers 0.
**(d)** Etudier la convergence dans $L^1$ de $Z_n$.

$\star$ **Exercice 6.12.** On dispose de deux dés équilibrés : le premier a deux faces noires et quatre faces rouges, le second a deux faces rouges et quatre noires. On choisit un dé au hasard, avec même probabilité $1/2$ de choisir l'un ou l'autre, puis on effectue une suite infinie de lancers indépendants avec ce dé. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n\text{-ème lancer donne une face noire} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**(a)** Montrer que les variables aléatoires $(X_n)_n$ ont même loi, de moyenne $1/2$. Sont-elles indépendantes ?
**(b)** Montrer que l'on n'a pas

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

**Exercice 6.13.** Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
**(a)** Déterminer la limite en loi de la suite

$$\left\{\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right\}_{n\geq 1}.$$

**(b)** Montrer que $S_n$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
**(c)** En déduire que la fonction de répartition $F_n$ de $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ est telle que

$$F_n(0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

**(d)** En déduire que

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

☹ **Exercice 6.14.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
**(a)** Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] \leq e^{\lambda^2/2}$. En déduire que

$$\mathbb{E}\big[\exp(\lambda S_n)\big] \leq e^{-\lambda^2 n/2}.$$

**(b)** En appliquant l'inégalité de Markov à $e^{\lambda S_n}$, vérifier que pour tout $a > 0$, et tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\lambda a}\mathbb{E}\big[e^{\lambda S_n}\big] \leq \exp\big(-\lambda a + \lambda^2 n/2\big)$$

**(c)** Montrer que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$. (Indication : appliquer l'inégalité précédente avec $\lambda = a/n$.) En déduire que, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}\Big(S_n \geq 2\sqrt{n\log n}\Big) \leq \frac{1}{n^2}.$$

**(d)** On note $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_n \geq 2\sqrt{n\log n}\}}$, et $N_\infty = \lim_{n\to\infty} N_n$ (la limite existe car $N_n$ est croissante). Montrer que $\mathbb{E}[N_\infty] < +\infty$, puis que $\mathbb{P}(N_\infty < +\infty) = 1$. Interprétez.

## Série d'exercices n° 7. Statistiques

Une ⋆ désigne un exercice important, et un ☹ un exercice difficile.

**Exercice 7.1.** On a relevé le nombre de dents cariées chez 100 enfants âgés de 7 ans dans une région de France. Les résultats obtenus sont les suivants :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nb de dents cariées | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Nb d'enfants | 30 | 34 | 14 | 10 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Calculer la moyenne empirique et la variance empirique du nombre de dents cariées.

**Exercice 7.2.** Un statisticien observe le nombre d'ampoules défaillantes à la sortie d'une chaine de production. Il veut estimer la probabilité de n'avoir aucune ampoule défaillante $\mathbb{P}(X=0)$. Pour cela, il compte le nombre de $N_n$, égaux à zéro. Il propose d'estimer par : $p_n = N_n/n$.
**(a)** Montrer en supposant juste les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d. que $p_n$ est un estimateur sans biais de $\mathbb{P}(X=0)$.
**(b)** Calculer son risque quadratique.

**Exercice 7.3.** Considérons un échantillon de taille 1 issu d'une population suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (ceci revient donc simplement à considérer une variable aléatoire $X$ avec $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$).
**(a)** Montrer que l'estimateur $\delta(X) = 1_{[X=0]}$ est non biaisé pour $e^{\lambda}$.
**(b)** On cherche à présent à estimer $e^{3\lambda}$ . Que pouvez-vous dire sur la statistique $(-2)^X$ ?
**(c)** Proposer en toute généralité un estimateur sans biais pour $e^n$.

**Exercice 7.4.** Soient $\theta \in (0,1)$ et un échantillon $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de loi géométrique de paramètre $\theta$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$.

**Exercice 7.5.** On considère le modèle avec $P_K$ la loi uniforme sur $1,...,K$, le paramètre $K > 0$ et $n \geq 2$.
**(a)** A l'aide de l'espérance de $X \sim P_K$, proposer un estimateur $\hat{K}$ de $K$. Déterminer son risque quadratique $R_K(\hat{K}, K)$.
**(b)** (i) Montrer que l'E.M.V. est $\tilde{K} = \max(X_1, ..., X_n)$. (ii) Montrer que sous $P_K$, $\tilde{K}$ vérifie $\mathbb{P}(\tilde{K} \leq k) = \frac{k^n}{K^n}$.
(iii) Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $0,...,K$. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(X > k)$. (iv) En déduire lee biais de $\tilde{K}$.

**Exercice 7.6.** On suppose $n = 1$ et considère le modèle des lois binomiales sur l'espace $\mathcal{X} = 0,...,m$, $m \in \mathbb{N}$ et

$$f(x,\theta) = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{m-x}, x \in \mathcal{X},$$

avec le paramètre $\theta \in [0,1]$.
**(a)** Montrer qu'une fonction $g(\theta)$ admet un estimateur sans biais si et seulement si $g$ est un polynôme de degré $< m$, et dans ce cas un tel estimateur est unique.
**(b)** Soit $g(\theta) = \theta^2$. Montrer que l'estimateur sans biais associé s'annule en $x = 0$ et $x = 1$.

**Exercice 7.7.** Lors d'un sondage sur 100 personnes interrogées, 60 pensent voter pour A. On modélise le choix par un échantillon $(X_1, \ldots, X_100)$ de variable indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p$. On cherche à déterminer un intervalle de confiance pour $p$ au niveau de confiance 99% (1% de risque)

**(a)** Déterminer l'espérance et la variance de la fréquence empirique $F = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$?

**(b)** On note $F^*$ la fréquence empirique centrée réduite. Par quelle loi peut on approcher celle de $F^*$ ?

On suppose désormais que $F^*$ suit $\mathcal{N}(0,1)$

**(c)** Déterminer $t$ tel que $\mathbb{P}(-t \leq F^* \leq t) \leq 0,99)$ et en déduire que

$$\mathbb{P}\left(F - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10} \leq p \leq F + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10}\right) \geq 0,99$$

**(d)** Montrer que pour tout $p \in [0,1]$ on a $p(1-p) \leq 1/4$ et en déduire que $[F - t/20; F + t/20]$ est un intervalle de confiance de $p$ au niveau de confiance 99%.

**Exercice 7.8.** Soit $a \in [0; 2\sqrt{3}]$, $X \sim U[0,a]$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon de variables de même loi que $X$ et indépendantes. On cherche un intervalle de confiance de a/2 au niveau de confiance 99% (niveau de risque 1%). On note $\overline{X_n}$ la moyenne empirique.

**(a)** Rappeler la moyenne $m$ de $X$ et montrer que $V(X) = a^2/12$. En déduire la moyenne et la variance de $\overline{X_n}$.

**(b)** En déduire que $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - a/2| > 0.1) \leq \frac{100}{n}$.

**(c)** Déterminer enfin $n$ pour que $[\overline{X_n} - 0.1; \overline{X_n} + 0.1]$ soit un intervalle de confiance de $a/2$ à uniyeau de confiance 99%.

**(d)** Par quelle loi peut-on approcher celle de $X_{1000}$ ?

**(e)** Déterminer $t$ pour que $\mathbb{P}(-t \leq \frac{\sqrt{12}}{a}100(X_n - a/2) < t) \geq 0,99$ et en déduire un autre intervalle de confiance de $a/2$ au niveau $\alpha$.

**Exercice 7.9.** Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro 1 est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire qu'il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

| Numéro de départ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro | 29 | 19 | 18 | 25 | 17 | 10 | 15 | 11 |

**(a)** Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).

**(b)** Calculer le khi deux observé et la probabilité critique. Conclure. (La table de Pearson pour $n = 7$ donne : $F_7(16,0) = 0,975$ et $F_7(18,5) = 0,990$.)