

**Exercice 1 : questions de cours****5 points**

1. Soit  $n$  un entier,  $f$  une fonction définie sur un ouvert contenant un nombre  $a$ .
- (a) Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $a$ . Préciser dans quel cas cette formule s'applique.

**Solution:** C'est du cours.

- (b) Déterminer le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$

**Solution:** On a déjà traité cela en cours. Il faut faire une division selon les puissances croissantes. Des exemples d'un tel calcul se trouvent dans la correction de l'exercice 4.

On obtient, après calcul

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^5)$$

- (c) Une fonction non dérivable en  $a$  peut-elle admettre un développement limité d'ordre 1 en  $a$ ? *Justifier.*

**Solution:** Non, c'est impossible.

2. (a) Qu'est ce qu'un polynôme irréductible sur  $\mathbb{R}$ ?

**Solution:** C'est du cours.

- (b) Donner un exemple de polynôme irréductible dans  $\mathbb{R}$  mais pas dans  $\mathbb{C}$ .

**Solution:**  $X^2 + 1$  est un exemple.

**Exercice 2 : Résolution d'une équation différentielle****5 points**

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle  $y' - 4y = (1+x)e^{4x}$  (E).

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (sans second membre).

**Solution:** Les solutions sont de la forme  $x \mapsto ke^{4x}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, en déduire une solution de l'équation différentielle de départ.

**Solution:** On cherche une fonction  $k$  qui vérifie  $k'(x) = \frac{(1+x)e^{4x}}{e^{4x}} = 1+x$ .

La fonction  $k : x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$  convient. Ainsi, toute solution de l'inéquation de départ s'écrit :

$$y(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + c\right) e^{4x} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

### Exercice 3 : Factorisation de polynôme

5 points

1. Quelles sont les racines du polynôme  $Q(X) = X^2 - 2X + 2$  dans  $\mathbb{R}$ ? Dans  $\mathbb{C}$ ?

**Solution:** On calcule le discriminant  $\Delta = -4$ .

Ce polynôme à coefficients réels ne possède pas de racines dans  $\mathbb{R}$  car son discriminant est négatif.

Ses racines dans  $\mathbb{C}$  sont, après calcul,  $\begin{cases} \alpha_1 = 1 + i \\ \alpha_2 = 1 - i \end{cases}$

2. Effectuer la division euclidienne du polynôme  $P(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$  par  $Q$ . Quel est son quotient? Quel est son reste?

**Solution:** Après calcul, on obtient  $P(X) = Q(X)^2 + 0$ .

Le quotient est  $Q(X)$  et le reste est 0.

3. Déterminer les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  et écrire  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  comme produit de polynômes de degré 1.

**Solution:** D'après ce qui précède, on peut écrire  $Q(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$  et ainsi :

$$P(x) = [(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)]^2 = (X - \alpha_1)^2(X - \alpha_2)^2$$

On en déduit que les racines de  $P$  sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Elles sont toutes deux de multiplicité deux.

4. Écrire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Solution:** Toujours d'après ce qui précède, la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$P(X) = Q(X)^2$$

car  $Q$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### Exercice 4

6 points

On veut déterminer le développement limité de la fonction tangente à l'ordre 5 en 0.

1. Première méthode : en utilisant la définition de tangente.

(a) Écrire les développements limités à l'ordre 5 en 0 de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

**Solution:** Ces développements limités sont dans le formulaire.

(b) En déduire le développement limité de  $\tan(x)$  à l'ordre 5 en 0.

*On pourra utiliser la méthode de division selon les puissances croissantes.*

**Solution:** On fait la division selon les puissances croissantes de  $X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120}$  par  $1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$  jusqu'à obtenir un quotient d'ordre 5 :

$$\begin{array}{r|l}
 X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} & 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} \\
 - X + \frac{X^3}{2} - \frac{X^5}{24} & \hline
 \frac{X^3}{3} - \frac{X^5}{30} & X + \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15} \\
 - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{6} - \frac{X^7}{72} & \\
 \hline
 \frac{2X^5}{15} - \frac{X^7}{72} & \\
 - \frac{2X^5}{15} + \dots & \\
 \hline
 \dots &
 \end{array}$$

Finalement, le développement limité de tangente à l'ordre 5 est :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

2. Seconde méthode : à l'aide d'une intégration.

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\cos(x)^2$ .

**Solution:** Faisons ce calcul :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 \\ &= 1 - 2 \times \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 2 \times \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

- (b) En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\frac{1}{\cos(x)^2}$  puis celui de  $\tan(x)$  à l'ordre 5.

**Solution:** Encore une fois en posant la division selon les puissances croissantes on obtient :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - X^2 + \frac{X^4}{3} \\ -1 + X^2 - \frac{X^4}{3} & \hline X^2 - \frac{X^4}{3} & 1 + X^2 + \frac{2X^4}{3} \\ -X^2 + X^4 - \frac{X^6}{3} & \\ \hline \frac{2X^4}{3} - \frac{X^6}{3} & \\ -\frac{2X^4}{3} + \dots & \\ \hline & \dots \end{array}$$

Et ainsi  $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ .

Or la dérivée de  $\tan(x)$  est  $\frac{1}{\cos^2(x)}$ . En intégrant ce développement limité, sachant que  $\tan(0) = 0$ , on obtient :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$