

Chapitre 2

Limites

2.1 Exercices sur le chapitre 2

Exercice 2.1.

Etudier les suites dont le terme général est :

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{3n-3}{2n+4}, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad e_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}.$$

Exercice 2.2.

Pour des suites réelles, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1) Toute suite positive et non majorée tend vers $+\infty$.
- 2) Toute suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
- 3) Si une suite admet une limite $\ell > 0$, alors tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
- 4) Toute suite non bornée diverge.
- 5) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Alors les deux suites convergent et ont même limite.
- 6) Si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 2.3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes les trois. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Indication : noter ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les trois limites ci-dessus et montrer que $\ell_1 = \ell_3$ et $\ell_2 = \ell_3$.

Exercice 2.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^4 - 4}$$

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\sqrt{2}^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\sqrt{2}^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Exercice 2.5.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n |u_k|$$

On suppose que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

1) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) Soit

$$K(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n \text{ et } u_k \geq 0\} \quad \text{et} \quad L(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n \text{ et } u_k < 0\}$$

$$\text{Montrer que } S_n = \sum_{k \in K(n)} u_k + \sum_{k \in L(n)} u_k = \sum_{k \in K(n)} |u_k| - \sum_{k \in L(n)} |u_k|$$

3) Montrer, en utilisant la question 1) que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2.6. Théorème de Cesàro

1) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergente de limite ℓ . Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ .

2) Donner un exemple simple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ non convergente telle que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 2.7.

Soient a et b eux réels fixés tels que $0 < a < b$.

On cherche à montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

sont convergentes et admettent une limite commune.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

2) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

3) Montrer par l'absurde que ces deux suites ont même limite.

Exercice 2.8.

On dit qu'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes $z_n = a_n + ib_n$, où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$, converge vers le nombre complexe $\ell = a + ib$, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

1) On suppose que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$.

On rappelle que le module de z_n , noté $|z_n|$, est le réel $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

2) Même question sous l'hypothèse que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 2.9.

Montrer que toute fonction définie sur \mathbb{R} , périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2.10.

Soient m et n deux entiers naturels. Etudier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$