

**Correction des exercices à chercher pour vendredi 9/9**

Dans chacune des questions,  $z$  désignant un complexe, on posera  $a = \Re(z)$  et  $b = \Im(z)$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{z}{i-1} - i = \frac{z}{i+1} + i \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} \right) z = 2i \\ \Leftrightarrow & \frac{i+1 - (i-1)}{i^2 - 1^2} z = 2i \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{-2} z = 2i \\ \Leftrightarrow & z = -2i \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \bar{z} = iz \Leftrightarrow a - bi = i(a + bi) \Leftrightarrow a - bi = -b + ai$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ \text{et} \\ -b = a \end{cases} \Leftrightarrow (b = -a)$$

Ainsi on a :  $\bar{z} = iz \Leftrightarrow \Im(z) = -\Re(z)$ .

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation est constitué par tous les nombres complexes dont la partie imaginaire est l'opposée de la partie réelle : ils s'écrivent sous la forme  $a - ai$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Par exemple  $3 - 3i$ ,  $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$  etc. en font partie.

$$\bullet \quad z^2 = z\bar{z} \Leftrightarrow z^2 - z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z = \bar{z})$$

$$\Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R})$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire est constitué par **tous** les nombres réels).

$$\bullet \quad \bar{z} - 1 = z\bar{z} - i \Leftrightarrow a - bi - 1 = (a + bi)(a - bi) - i \Leftrightarrow a - 1 - bi = a^2 - (bi)^2 - i$$

$$\Leftrightarrow a - 1 - bi = a^2 - (bi)^2 - i \Leftrightarrow (\underbrace{a - 1}_{\in \mathbb{R}}) + (\underbrace{-b}_{\in \mathbb{R}})i = (\underbrace{a^2 + b^2}_{\in \mathbb{R}}) + (\underbrace{-1}_{\in \mathbb{R}})i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = a^2 + b^2 \\ \text{et} \end{cases} \quad (\text{par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a + 2 = 0 \\ \text{et} \\ b = 1 \end{cases}$$

L'équation du second degré  $a^2 - a + 2 = 0$  a un discriminant égal à  $\Delta = -7$ . Comme  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède aucune solution réelle (attention, des solutions complexes non réelles ne nous intéresseraient pas puisque  $a$ , comme toute partie réelle (ici, celle de  $z$ ) qui se respecte, est un nombre réel).

Ainsi l'équation de départ ne possède aucune solution dans  $\mathbb{C}$ .