

Correction des exercices à chercher pour vendredi 9/9

Dans chacune des questions, z désignant un complexe, on posera $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \frac{z}{i-1} - i = \frac{z}{i+1} + i \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} \right) z = 2i \\
 \Leftrightarrow & \frac{i+1-(i-1)}{i^2-1^2} z = 2i \\
 \Leftrightarrow & \frac{2}{-2} z = 2i \\
 \Leftrightarrow & z = -2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \bar{z} = iz \Leftrightarrow a - bi = i(a + bi) \Leftrightarrow a - bi = -b + ai \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a = -b \\ \text{et} \\ -b = a \end{cases} \Leftrightarrow (b = -a)
 \end{aligned}$$

Ainsi on a : $\bar{z} = iz \Leftrightarrow \Im(z) = -\Re(z)$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation est constitué par tous les nombres complexes dont la partie imaginaire est l'opposée de la partie réelle : ils s'écrivent sous la forme $a - ai$ avec $a \in \mathbb{R}$. Par exemple $3 - 3i$, $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ etc. en font partie.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad z^2 = z\bar{z} \Leftrightarrow z^2 - z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z = \bar{z}) \\
 \Leftrightarrow & (z = 0 \text{ ou } z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est \mathbb{R} (c'est-à-dire est constitué par **tous** les nombres réels).

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \bar{z} - 1 = z\bar{z} - i \Leftrightarrow a - bi - 1 = (a + bi)(a - bi) - i \Leftrightarrow a - 1 - bi = a^2 - (bi)^2 - i \\
 \Leftrightarrow & a - 1 - bi = a^2 - (bi)^2 - i \Leftrightarrow \underbrace{(a-1)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(-b)}_{\in \mathbb{R}}i = \underbrace{(a^2+b^2)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(-1)}_{\in \mathbb{R}}i \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a - 1 = a^2 + b^2 \\ \text{et} \\ -b = -1 \end{cases} \quad (\text{par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe}) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 - a + 2 = 0 \\ \text{et} \\ b = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'équation du second degré $a^2 - a + 2 = 0$ a un discriminant égal à $\Delta = -7$. Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle (attention, des solutions complexes non réelles ne nous intéresseraient pas puisque a , comme toute partie réelle (ici, celle de z) qui se respecte, est un nombre réel).

Ainsi l'équation de départ ne possède aucune solution dans \mathbb{C} .