TS1 Contrôle n° 1 → correction de l'exercice V (BONUS)

• 1) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{1}{2}n$.

• On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1 \geqslant 1 + \frac{1}{2} \times 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{1}{2}n$ (*).

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \underbrace{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}}_{S}$; la somme S est constituée de 2^n termes

(car $2^{n+1} - (2^n+1) + 1 = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n$) dont le plus petit est $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. On peut en déduire que $S \geqslant 2^n \times \dfrac{1}{2^{n+1}}$, soit $S \geqslant \dfrac{1}{2}$. En additionnant membre à membre cette dernière inégalité et (*), on obtient alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + S \geqslant 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{1}{2}(n+1)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

• 2) Comme $\omega \neq 1$, on a $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = \dfrac{1-1}{1-\omega} = 0$, soit $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ (4)

D'après (4), on a alors $(\omega^2+\omega+1)(\omega^3+\omega+1)(\omega^4+\omega+1) = (-\omega^3-\omega^4)(-\omega^2-\omega^4)(-\omega^2-\omega^3)$, soit

$$
\begin{aligned}
(\omega^2+\omega+1)(\omega^3+\omega+1)(\omega^4+\omega+1) &= -\omega^3 \times \omega^2 \times \omega^2 (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega) \\
&= -\underbrace{\omega^5}_{1} \times \omega^2 (1+\omega) \underbrace{(1+\omega+\omega^2+\omega^3)}_{-\omega^4 \text{ d'après } (4)} \\
&= \omega^6 (1+\omega) = \omega \times \underbrace{\omega^5}_{1} (\omega+1) = \omega(\omega+1)
\end{aligned}
$$

• 3) Notons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2016} \beta^k = \frac{1-\beta^{2017}}{1-\beta} = \frac{1-1}{1-\beta} = 0$. Donc $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{2016} k\beta^k = \sum_{k=1}^{2016} k\beta^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{2016} \beta^k}_{=0}$,

d'où $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{2016} k\beta^k + \sum_{k=1}^{2016} \beta^k + 1 = \sum_{k=1}^{2016} (k\beta^k + \beta^k) + 1 = \sum_{k=1}^{2016} (k+1)\beta^k + 1$

donc $\displaystyle \beta S = \beta \sum_{k=1}^{2016} (k+1)\beta^k + \beta = \sum_{k=1}^{2016} (k+1)\beta^{k+1} + \beta = \sum_{k=2}^{2017} k\beta^k + \beta$

d'où $\displaystyle \beta S = \sum_{k=1}^{2016} k\beta^k + 2017\underbrace{\beta^{2017}}_{1} - \beta + \beta$, soit $\beta S = S + 2017$ et finalement $S = \dfrac{2017}{\beta - 1}$.