

Exercices supplémentaires : feuille n°1

I a) On note $Z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Calculer Z^{2015} .

b) On pose $Z = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} + i\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$. Calculer Z^{2016} .

II Soit ω un nombre complexe différent de 1 tel que $\omega^7 = 1$ (on admet qu'il existe bien un tel nombre complexe). On note $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
Montrer que $T = \bar{S}$ et calculer $\Re(S)$ et $|\Im(S)|$.

III Résoudre le système d'équations d'inconnues complexes u et v :

$$\begin{cases} u^3 = 3u + 7v \\ v^3 = 7u + 3v \end{cases}$$

IV Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$.

Montrer que : $\frac{1}{a(2-a)+bc} + \frac{1}{b(2-b)+ac} + \frac{1}{c(2-c)+ab} \geq 4,5$.

V Soient n un entier naturel impair, $(x_1; \dots; x_n)$ une liste de n réels distincts et $(y_1; \dots; y_n)$ une permutation* de cette liste.

On suppose que : $|x_1 - y_1| = \dots = |x_n - y_n|$.

1) Montrer que pour tout entier $k \in [1; n]$, $x_k = y_k$.

2) Le résultat subsiste-t-il si n est pair ?

VI Soit un carré de côté 1. Montrer que si 9 points sont intérieurs au carré, il existe un triangle formé avec trois des points précédents dont l'aire est inférieure à $\frac{1}{8}$.

VII Soient a, b et c trois réels tels que $a + b + c = 0$.

1) Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

2) Montrer que $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \times \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$. La réciproque est-elle vraie ?

VIII Soit f une fonction définie sur $[0; 1]$. On suppose que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \geq 0$ et que $f(1) = 1$. De plus si a et b sont deux réels positifs tels que $a + b \leq 1$, alors $f(a + b) \geq f(a) + f(b)$.

a) Prouver que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq 2x$

b) Est-il également vrai que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq 1,9x$?

(*) Une permutation d'une liste s'obtient en changeant *éventuellement* l'ordre des termes de cette liste. Par exemple $(1; -2; 4; 0)$ est une permutation de la liste $(0; -2; 1; 4)$.