

Correction de l'exercice n°4 de la feuille « Complexes : les bases »

• Notons que pour que $Z = \frac{\bar{z} + 2i}{iz - 1}$ existe, il est nécessaire d'avoir $iz - 1 \neq 0$, ce qui équivaut à $z \neq \frac{1}{i} = -i$. Le point M d'affixe z est donc implicitement différent du point A d'affixe $-i$.

• **Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} \text{On a } Z &= \frac{a - bi + 2i}{i(a + bi) - 1} = \frac{a + (2 - b)i}{(-b - 1) + ia} = \frac{[a + (2 - b)i][(-b - 1) - ia]}{[(-b - 1) + ia][(-b - 1) - ia]} \\ \text{d'où } Z &= \frac{-a(b + 1) - ia^2 + (b - 2)(b + 1)i - a(2 - b)i^2}{(-b - 1)^2 - (ia)^2} \\ \Rightarrow Z &= \frac{-ab - a + 2a - ab + [(b - 2)(b + 1) - a^2]i}{(b + 1)^2 + a^2} \\ \Rightarrow Z &= \underbrace{\frac{a - 2ab}{(b + 1)^2 + a^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{b^2 - b - 2 - a^2}{(b + 1)^2 + a^2}}_{\in \mathbb{R}} i \quad (\leftarrow \text{forme algébrique de } Z) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \Re z = 0 \Leftrightarrow \frac{a - 2ab}{(b + 1)^2 + a^2} = 0 \Leftrightarrow a - 2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow a(1 - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re z = 0 \\ \text{ou} \\ \Im z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M \in [(O\vec{v}) \setminus \{A\}] \cup \Delta, \text{ où } \Delta \text{ est la droite d'équation } y = \frac{1}{2}.$$

• **Méthode 2 :**

$$\text{On a } \bar{Z} = \overline{\left(\frac{\bar{z} + 2i}{iz - 1}\right)} = \frac{\overline{\bar{z} + 2i}}{\overline{iz - 1}} = \frac{\bar{z} + 2\bar{i}}{\bar{i} \times \bar{z} - \bar{1}} = \frac{z - 2i}{-i\bar{z} - 1}.$$

$$\text{Donc } Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \frac{z - 2i}{-i\bar{z} - 1} = -\frac{\bar{z} + 2i}{iz - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - 2i}{-i\bar{z} - 1} = \frac{\bar{z} + 2i}{1 - iz}$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i)(1 - iz) = (-i\bar{z} - 1)(\bar{z} + 2i)$$

(en effet, comme $z \neq -i$, ni $iz - 1$, ni son conjugué $-i\bar{z} - 1$ ne peuvent être nuls)

$$\Leftrightarrow z - iz^2 - 2i - 2z = -i\bar{z}^2 + 2\bar{z} - \bar{z} - 2i$$

$$\Leftrightarrow -z - iz^2 = -i\bar{z}^2 + \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow i\bar{z}^2 - iz^2 - z - \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}(\bar{z}-z)(\bar{z}+z)-(z+\bar{z})=0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}+z)[\mathrm{i}(\bar{z}-z)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow (2\Re z)[\mathrm{i}(-2\mathrm{i}\Im z)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow (\Re z)(2\Im z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\Re z=0 \quad \text{ou} \quad \Im z=\tfrac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M} \in [(O\overrightarrow{v}) \setminus \{\mathrm{A}\}] \cup \Delta \quad , \text{ où } \Delta \text{ est la droite d'équation } y = \tfrac{1}{2}.$$