Correction de l'exercice V de la feuille « Le raisonnement par récurrence »

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

• **Initialisation :** Si $n = 1$, on a $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} = 1$ et $2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. On a alors :
$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$, d'où, en ajoutant $\frac{1}{(n+1)^2}$ de chaque côté :
$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ $(^*)$.

Pour montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, il suffit d'établir que $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$ $(\natural)$. En effet conjuguée avec $(^*)$, l'inégalité $(\natural)$ montrera que $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$, c'est-à-dire précisément que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Or $(\natural)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{n}{n(n+1)^2} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow$ $\frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{n(n+1)^2} \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{n^2+2n+1-n^2-n-n}{n(n+1)^2} \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n(n+1)^2} \geqslant 0$
Comme cette inégalité est bien vraie (car n est positif), l'inégalité $(\natural)$ aussi.

• On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$, ce qui permet de déduire que $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2$, vu que $2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.