

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe...

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

a) $2iz = 1 - z$

b) $4iz + 2i = 1 - z + i$

c) $\frac{4}{5} + \frac{2z}{3} = \frac{2i}{5} - iz$

d) $z = 2\bar{z}$

e) $2z - 4 = 5i + 4\bar{z}$

f) $z\bar{z} = z + 2$

g) $\bar{z} + 1 = z\bar{z} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe...

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

a) $2iz = 1 - z$

b) $4iz + 2i = 1 - z + i$

c) $\frac{4}{5} + \frac{2z}{3} = \frac{2i}{5} - iz$

d) $z = 2\bar{z}$

e) $2z - 4 = 5i + 4\bar{z}$

f) $z\bar{z} = z + 2$

g) $\bar{z} + 1 = z\bar{z} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe...

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

a) $2iz = 1 - z$

b) $4iz + 2i = 1 - z + i$

c) $\frac{4}{5} + \frac{2z}{3} = \frac{2i}{5} - iz$

d) $z = 2\bar{z}$

e) $2z - 4 = 5i + 4\bar{z}$

f) $z\bar{z} = z + 2$

g) $\bar{z} + 1 = z\bar{z} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$

A.P. Quelques équations d'inconnue complexe... : corrections

• a) $2iz = 1 - z$

$$\Leftrightarrow z + 2iz = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2i)z = 1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{1 + 2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{1^2 - (2i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

• b) $4iz + 2i = 1 - z + i$

$$\Leftrightarrow z + 4iz = 1 + i - 2i$$

$$\Leftrightarrow (1 + 4i)z = 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 - i}{1 + 4i} = \frac{(1 - i)(1 - 4i)}{1^2 + 4^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 - 4i - i + 4i^2}{17} = -\frac{3}{17} - \frac{5}{17}i$$

• c) $\frac{4}{5} + \frac{2z}{3} = \frac{2i}{5} - iz$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + i\right)z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i}{\frac{2}{3} + i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-12 + 6i}{10 + 15i} \quad (\text{après avoir multiplié par 15 en haut et en bas})$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(-12 + 6i)(10 - 15i)}{10^2 + 15^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-120 + 180i + 60i - 90i^2}{325}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-30 + 240i}{325} = -\frac{6}{65} + \frac{48}{65}i$$

Dans les exercices qui suivent, on a $z \in \mathbb{C}$ et on notera $z = a + bi$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

• d) $z = 2\bar{z} \Leftrightarrow a + bi = 2(a - bi) \Leftrightarrow a + bi = 2a - 2bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a \\ \text{et} \\ b = -2b \end{cases} \quad (\text{par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$$

• e) $2z - 4 = 5i + 4\bar{z} \Leftrightarrow 2(a + bi) - 4 = 5i + 4(a - bi) \Leftrightarrow \underbrace{2a - 4}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2b}_{\in \mathbb{R}}i = \underbrace{4a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(5 - 4b)}_{\in \mathbb{R}}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4 = 4a \\ \text{et} \\ 2b = 5 - 4b \end{cases} \quad (\text{par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{et} \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow z = -2 + \frac{5}{6}i$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ f) } z\bar{z} &= z + 2 \Leftrightarrow (a + bi)(a - bi) = a + bi + 2 \Leftrightarrow a^2 - (bi)^2 = a + 2 + bi \\
&\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}} i = \underbrace{a + 2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}} i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a + 2 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \quad (\text{par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation du second degré $a^2 - a - 2 = 0$ vaut $\Delta = 9 > 0$, donc celle-ci possède deux solutions réelles : $\frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$. Ainsi :

$$z\bar{z} = z + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (a = -1 \text{ ou } a = 2) \\ \text{et} \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (z = \underbrace{-1 + 0i}_{-1} \text{ ou } z = \underbrace{2 + 0i}_2)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ g) } \bar{z} + 1 &= z\bar{z} + \frac{\sqrt{5}}{2} i \\
&\Leftrightarrow a - bi + 1 = (a + bi)(a - bi) + \frac{\sqrt{5}}{2} i \\
&\Leftrightarrow a + 1 - bi = a^2 - (bi)^2 + \frac{\sqrt{5}}{2} i \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(a + 1)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(-b)}_{\in \mathbb{R}} i = \underbrace{(a^2 + b^2)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2}}_{\in \mathbb{R}} i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = a^2 + b^2 \\ \text{et} \\ -b = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (\text{par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = a^2 + \frac{5}{4} \\ \text{et} \\ b = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} = 0 \\ \text{et} \\ b = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'équation du second degré $a^2 - a + \frac{1}{4} = 0$ a un discriminant égal à $\Delta = 0$. L'équation possède donc une unique solution réelle : $a = -\frac{-1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation de départ est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} i \right\}$.