TS

Opérations sur les limites : exercices d'entraînement corrigés

A Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2+10)$

b) $u_n = \dfrac{2n^3 - n}{n^2+n+1}$

c) $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3+5}$

d) $u_n = \dfrac{5^n+3^n}{4^n}$

e) $u_n = 4^n - 2^n$

f) $u_n = \dfrac{n^2-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+3}$

B On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 161$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$.

1) Écrire un programme sur la calculatrice qui permet, à partir de la valeur de n entrée par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de u_n. Utiliser le programme pour calculer u_{10}, u_{20}, u_{30} et u_{40} : vers quelle valeur semble converger la suite (u_n) ?

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 20$.

- **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique(préciser le premier terme et la raison).
- **b)** Exprimer v_n en fonction de n.
- **c)** Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de (u_n).

CORRECTION

A

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2+10) = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{10}{n} = n + \dfrac{10}{n}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(10\times\frac{1}{n}\right) = 10\times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme : } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

b) On a $u_n = \dfrac{n^2\left(2n-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right) = 1+0+0 \underbrace{=}_{(\natural)} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-\tfrac{1}{n}\right) \underbrace{=}_{(\square)} +\infty$$

On déduit de $(\natural)$ et $(\square)$ par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5} = \dfrac{n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4n + \frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4n + \frac{5}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = -2 \times 0 = 0 \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 3 \times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{3}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\natural)} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 5 \times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim_{n\to+\infty} \left(4n + \tfrac{5}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$$

On déduit de $(\natural)$ et $(\star)$ par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : on pouvait également mettre en facteur n^3 en haut et en bas ou même mettre en facteur n^2 en haut et n^3 en bas.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{5^n + 3^n}{4^n} = \dfrac{5^n}{4^n} + \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Or $\dfrac{5}{4} \in]1; +\infty[$ et $\dfrac{3}{4} \in]-1; 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

On déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n + 3^n}{4^n} = +\infty$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $4^n - 2^n = 4^n\left(1 - \dfrac{2^n}{4^n}\right) = 4^n\left[1 - \left(\dfrac{2}{4}\right)^n\right] = 4^n\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

On a $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 - 0 \underbrace{=}_{\natural} 1$.

Comme $4 \in]1; +\infty[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$. On déduit de $(\star)$ et $(\natural)$ par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (4^n - 2^n) = +\infty$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{\dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}}{\dfrac{n\sqrt{n} + 3}{n\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n} - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{3}{n\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n} - \dfrac{1}{n}}{1 + 3 \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

- Par produit et somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + 3 \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + 3 \times 0 \times 0 = 1$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} - \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$.
- Finalement, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{\text{B}}$ **1)** Programme sur Texas Instrument permettant de calculer le terme de rang N de la suite u définie par $u_0 = 161$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$:

```
Prompt N
161 → U
For(I,1,N)
0,6*U+8 → U
End
Disp "U=",U
```

n	10	20	30	40
u_n	20,9	20,005	20,0003	20,0000002

Il semble donc que la suite (u_n) converge (très rapidement) vers 20.

2)a) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 20$, donc $v_{n+1} = 0,6u_n + 8 - 20 = 0,6u_n - 12 = 0,6(u_n - 20)$, soit $v_{n+1} = 0,6v_n$, ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,6$. Son terme initial est $v_0 = u_0 - 20 = 161 - 20 = 141$.

2)b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times 0,6^n = 141 \times 0,6^n$.

2)c) (v_n) est une suite géométrique dont la raison appartient à l'intervalle $]-1;1[$, donc elle converge vers 0. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n + 20$, on déduit par somme que (u_n) converge vers $0 + 20 = 20$.