

Correction de la fin du polycopié « Suites définies implicitement : aspects graphiques (I) »

[B] 3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $s_{n+1} = v_{n+1} - 2 = \frac{3v_n}{1+v_n} - \frac{2(1+v_n)}{1+v_n} = \frac{3v_n - 2 - 2v_n}{1+v_n}$, soit $s_{n+1} = \frac{v_n - 2}{1+v_n} = \frac{s_n}{1+v_n}$.

Or, d'après B.2.a., on a $v_n \geq 2$ donc $1+v_n \geq 3$, d'où $\frac{1}{1+v_n} \leq \frac{1}{3}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Comme $v_n \geq 2$, on a $s_n = v_n - 2 \geq 0$, donc $\frac{s_n}{1+v_n} \leq \frac{1}{3}s_n$, soit $s_{n+1} \leq \frac{1}{3}s_n$.

[B] 3)b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $s_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

• **Initialisation** : on a $s_0 = v_0 - 2 = 5 - 2 = 3$ et $\frac{1}{3^{0-1}} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$, donc $s_0 \leq \frac{1}{3^{0-1}}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité** : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

On a $s_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ donc $\frac{1}{3} \times s_n \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}$ (car $\frac{1}{3} > 0$), d'où $\frac{1}{3}s_n \leq \frac{1}{3^{1+n-1}} = \frac{1}{3^n}$. Or d'après la question précédente, on a $s_{n+1} \leq \frac{1}{3}s_n$, par conséquent $s_{n+1} \leq \frac{1}{3^n}$, soit $s_{n+1} \leq \frac{1}{3^{(1+n)-1}}$, ce qui établit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

[B] 3)c) • D'après B.2.a., on sait que $v_n \in]2; +\infty[$, donc $2 \leq v_n$.

• D'après B.3.b., on a $s_n \leq \frac{1}{3^{n-1}}$, soit $v_n - 2 \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ et finalement $v_n \leq 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$.

• **Bilan** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$, soit $2 \leq v_n \leq 2 + 3 \times \frac{1}{3^n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et comme $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$, on a par produit et somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + 3 \times \frac{1}{3^n} \right) = 2 + 3 \times 0 = 2$. Le théorème « des gendarmes » entraîne alors que (v_n) converge vers 2.