

Correction du contrôle n°3**I**

1. (a) Le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables, donc $p(A) = \frac{1}{2}$.

L'urne a compte une boule rouge sur un total de 5 donc $p_A(R) = \frac{1}{5}$.

D'où $p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

- (b) D'après la formule des probabilités totales :

$p(R) = p(A \cap R) + p(\bar{A} \cap R) = p(A \cap R) + p(B \cap R)$. Comme l'urne b compte 4 boules rouges sur un total de 6, on a $p_B(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, d'où :

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B) \times p_B(R) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}.$$

- (c) Il s'agit de calculer $p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}$.

2. (a) L'urne a compte n boules rouges sur un total de $4 + n$ donc $p_A(R) = \frac{n}{4 + n}$.

L'urne b compte $5 - n$ boules rouges sur un total de $(5 - n) + 2 = 7 - n$ donc $p_B(R) = \frac{5 - n}{7 - n}$.

- (b) D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p(A \cap R) + p(B) \times p_B(R) = \frac{1}{2} \times \frac{n}{4 + n} + \frac{1}{2} \times \frac{5 - n}{7 - n}$$

$$\text{d'où } p(R) = \frac{n(7 - n) + (5 - n)(4 + n)}{2(4 + n)(7 - n)} = \frac{-2n^2 + 8n + 20}{2(4 + n)(7 - n)} = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4 + n)(7 - n)}.$$

- (c) Valeurs obtenues grâce à la calculatrice, arrondies à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5
$p(R)$	0,36	0,43	0,47	0,46	0,42	0,28

On obtient donc la valeur maximale pour $p(R)$ lorsque $n = 2$, ce qui revient à :

- 2 boules rouges et 4 boules blanches dans l'urne a
- $5 - 2 = 3$ boules rouges et 2 boules blanches dans l'urne b .

II) 1) $f(x)$ existe si et seulement si $x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;1]$

(*faire un tableau de signes : détails laissés au lecteur). Ainsi, $D = [0;1]$

2) $x \mapsto x-x^2$ est dérivable (par somme) et strictement positive* sur $]0;1[$ donc $x \mapsto \sqrt{x-x^2}$ est dérivable sur $]0;1[$. Comme $x \mapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par somme), on en déduit que f est dérivable sur $]0;1[$ par produit. De plus,

$$\text{pour tout } x \in]0;1[, \quad f'(x) = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\sqrt{x-x^2}}_{v(x)} + \underbrace{(x-1)}_{u(x)} \times \underbrace{\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}_{v'(x)} = \frac{u'(x)v(x)}{2\sqrt{u(x)v(x)}}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{2\sqrt{x-x^2}^2 + (x-1)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{2(x-x^2) + x - 2x^2 - 1 + 2x}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$\text{et finalement, } f'(x) = \frac{-4x^2 + 5x - 1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

3) Lorsque $x \in]0;1[$, on a $2\sqrt{x-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 5x - 1$: trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 9 > 0$ et les racines valent $\frac{1}{4}$ et 1 .

D'où :

x	$-\infty$	$1/4$	1	$+\infty$
$-4x^2 + 5x - 1$		-	+	-

et

x	0	$1/4$	1
$f'(x)$		-	+
f	0	$\searrow -\frac{3\sqrt{3}}{16}$	0

du signe de $a = -4$

$$(\text{Détail : } f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4} - 1)\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{16}} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}).$$

4) L'équation de T est $y = f'(0,2)(x - 0,2) + f(0,2)$.

$$\text{Avec } f(0,2) = (0,2 - 1)\sqrt{0,2 - 0,2^2} = -0,8 \times \sqrt{0,16} = -0,8 \times 0,4 = -0,32$$

$$\text{et } f'(0,2) = \frac{-4 \times 0,2^2 + 5 \times 0,2 - 1}{2\sqrt{0,2 - 0,04}} = \frac{-0,16}{2\sqrt{0,16}} = \frac{-0,16}{2 \times 0,4} = -0,2,$$

$$\text{d'où T : } y = -0,2(x - 0,2) - 0,32, \text{ soit T : } y = -0,2x - 0,28.$$

III)

1) $x \mapsto x + \frac{6}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ par quotient et somme, donc

$f: x \mapsto x(x + \frac{6}{x})^5$ également par produit. On a $f = uv$ avec $v = u^5$,

en notant $u: x \mapsto x$ et $u^5: x \mapsto x + \frac{6}{x}$ donc $f' = u'v + uv' = u'v + u \times 5u^4u'$,

soit, pour tout $x > 0$: $f'(x) = 1 \times (x + \frac{6}{x})^5 + x \times 5(1 - \frac{6}{x^2})(x + \frac{6}{x})^4$, d'où

$$f'(x) = \left[x + \frac{6}{x} + 5x(1 - \frac{6}{x^2}) \right] (x + \frac{6}{x})^4 = \left(x + \frac{6}{x} + 5x - \frac{30}{x} \right) (x + \frac{6}{x})^4 \text{ et}$$

$$\text{finalement, } f'(x) = \left(6x - \frac{24}{x} \right) \left(x + \frac{6}{x} \right)^4 = \frac{6x^2 - 24}{x} \left(x + \frac{6}{x} \right)^4.$$

2) Lorsque $x \in]0;+\infty[$, on a $x > 0$ et $(x + \frac{6}{x})^4 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $6x^2 - 24$, polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 2 (détails laissés au lecteur),

d'où

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$6x^2-24$		$+$	$-$	$+$

et

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f			

du signe de $a=6$

(Détail : $f(2) = 2 \left(2 + \frac{6}{2}\right)^5 = 2 \times 5^5 = 6250$).

IV) $f: x \mapsto 2x + x^{-2}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ par produit et somme et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2 - 2x^{-2-1} = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$. Lorsque $x \in]0; +\infty[$, on a $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^3-1 . Or comme $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $x > 1 \Leftrightarrow x^3 > 1^3 = 1$, d'où $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f			

D'après le tableau des variations ci-contre, f possède un minimum en $x=1$, égal à :

$$f(1) = 2 \times 1 + \frac{1}{1^2} = 3.$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geq 3$.

BONUS (éléments de correction)

A) $f: x \mapsto (63\sqrt{x} - 62)^{64}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée $f': x \mapsto 64 \times 63 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (63\sqrt{x} - 62)^{63}$ donc la limite cherchée est $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 64 \times 63 \times \frac{1}{2} = 2016$

B) On a $f_{n+1} = \sqrt{f_n}$ donc $f'_{n+1} = \frac{f'_n}{2\sqrt{f_n}}$, en particulier $f'_{n+1}(1) = \frac{1}{2} f'_n(1)$. La suite $(f'_n(1))_{n \geq 1}$ est donc géométrique raison $\frac{1}{2}$, d'où $\forall n \geq 1, f'_n(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} f'_1(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$, soit $f'_n(1) = \frac{1}{2^n}$.

c). Supposons d'abord $f(0) \geq 0$. On a $g'(x) = f'(x) + Bx - f'(0)$ et $g''(x) = f''(x) + B$. Comme $|f''| \leq B$, on a $f'' \geq -B$ donc $g'' \geq 0$, ce qui prouve que g' est croissante sur $\mathbb{R}$; comme $g'(0) = 0$, on a donc $g' \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$ et $g' \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, ce qui entraîne que g est décroissante (resp. croissante) sur $]-\infty; 0]$ (resp. sur $[0; +\infty[$). Ainsi g possède un minimum en 0 , égal à $g(0) = f(0)$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq f(0) \geq 0$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \frac{1}{2} Bx^2 - f'(0)x \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A + \frac{1}{2} Bx^2 - f'(0)x \geq 0$ car $|f| \leq A$. Ainsi le trinôme $\frac{1}{2} Bx^2 - f'(0)x + A$ reste positif sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que le discriminant $\Delta = f'(0)^2 - 4 \times \frac{1}{2} B \times A$ est négatif : on a alors $f'(0)^2 \leq 2AB$, d'où $|f'(0)| \leq \sqrt{2AB}$.

• Le cas où $f(0) \leq 0$ se ramène au cas précédent, en remplaçant f par $-f$.