

I 1) $f: x \mapsto \frac{7x-3}{2x}$ est dérivable sur

$]0; +\infty[$ par somme, produit et quotient

et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{7 \times 2x - 2(7x-3)}{(2x)^2}$,

$$\text{soit } f'(x) = \frac{14x - 14x + 6}{4x^2} = \frac{6}{4x^2} = \frac{3}{2x^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2) a) Voir ci-contre.

2) b) Il semble que la suite (u_n) soit croissante et converge vers 3.

3) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition:

$$u_n \in [1; 3].$$

• On a $u_0 = 1 \in [1; 3]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $1 \leq u_n \leq 3$ donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$ car f est croissante sur $]0; +\infty[$ d'après 1). Or $f(1) = \frac{7 \times 1 - 3}{2 \times 1} = 2$

et $f(3) = \frac{7 \times 3 - 3}{2 \times 3} = \frac{18}{6} = 3$ donc $2 \leq u_{n+1} \leq 3$ (vu que $u_{n+1} = f(u_n)$), ce qui prouve que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ (car $2 \geq 1$) et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• On a ainsi montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 3]$.

4) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ la proposition: $u_{n+1} \geq u_n$.

• On a $u_1 = \frac{7u_0 - 3}{2u_0} = \frac{7 - 3}{2} = 2 \geq 1 = u_0$ donc $u_1 \geq u_0$, ce qui montre que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_{n+1} \geq u_n$ donc $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ par croissance de f sur $]0; +\infty[$, soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, ce qui prouve que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

• On a ainsi prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, ce qui établit la croissance de la suite (u_n) .

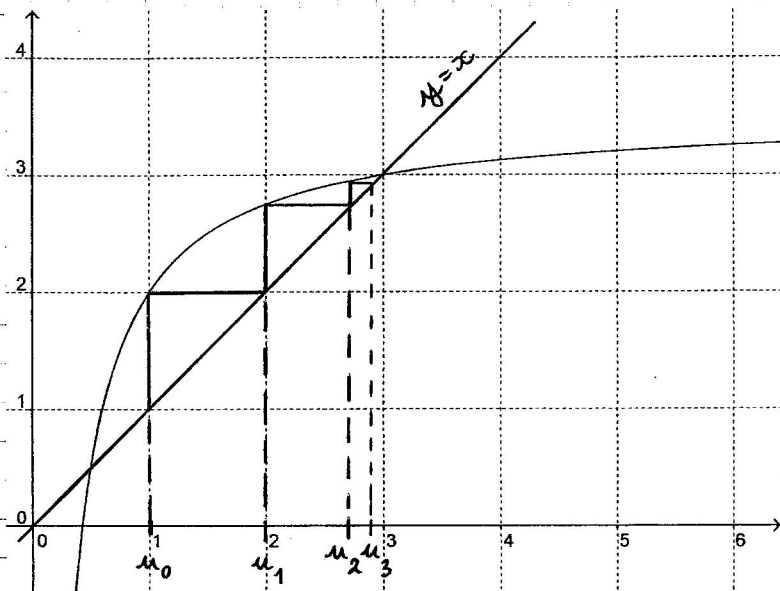
5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $u_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \frac{7u_n - 3}{2u_n} = \frac{3 \times 2u_n}{2u_n} - \frac{7u_n - 3}{2u_n}$, d'où

$$u_{n+1} = \frac{6u_n - 7u_n + 3}{2u_n} = \frac{-u_n + 3}{2u_n} = \frac{3 - u_n}{2u_n} = \frac{u_n}{2u_n}.$$

5) b) D'après 3), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ donc $2u_n \geq 2$ d'où $\frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2}$ par

décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Comme $u_n \leq 3$, on a donc $3 - u_n \geq 0$, soit

$u_{n+1} \geq 0$. On en déduit que $\frac{1}{2u_n} \times u_n \leq \frac{1}{2} \times u_n$, soit $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$



5) c) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $w_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

• On a $w_0 = 3 - u_0 = 3 - 1 = 2$ et $\frac{1}{2^{0-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$ donc $w_0 \leq \frac{1}{2^{0-1}}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $w_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ donc

$$\frac{1}{2} \times w_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ soit } \frac{1}{2} w_n \leq \frac{1}{2^n}. \text{ Or d'après 5) b), on a } w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n, \text{ ce}$$

qui permet de conclure que $w_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} (= \frac{1}{2^{(n+1)-1}})$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

5) d) Notons que $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^1}{2^n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. voir 5) b)

(Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, d'où par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 \times 0 = 0$.)

Le théorème des gendarmes permet alors de déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = 3 - u_n$ donc $u_n = 3 - w_n$, ce qui prouve par somme que (u_n) converge bien vers $3 - 0 = 3$.

II 1) En utilisant le rappel avec $a=1$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+1)^n \geq 1 + 1 \times n$, soit $2^n \geq 1 + n$. Comme $1 + n > n$, on en déduit que $2^n > n$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $2^n > n$ donc $(2^n)^2 > n^2$ par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$, d'où $2^{2n} > n^2$, soit $4^n > n^2$. Si $n \geq 1$, on a $n\sqrt{n} > 0$

donc $\frac{4^n}{n\sqrt{n}} > \frac{n^2}{n\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on déduit par

comparaison que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4^n}{n\sqrt{n}}\right) = +\infty$.