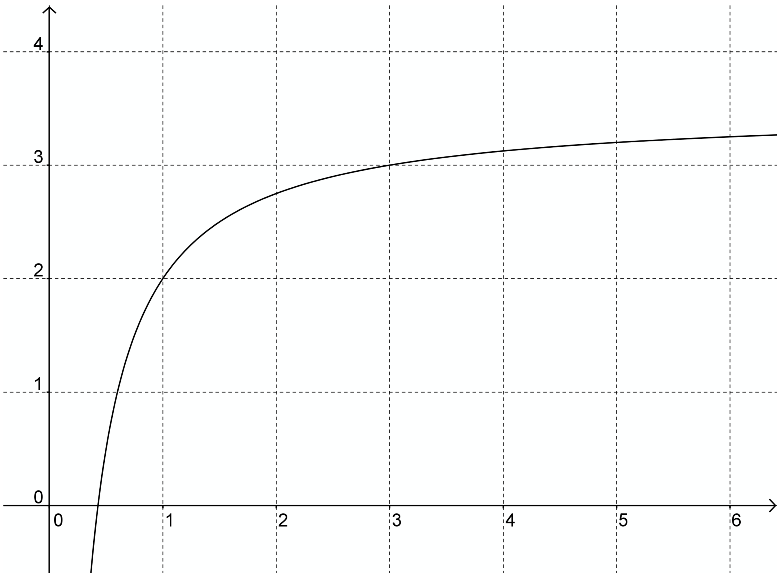
Autour du contrôle de Mathématiques n°2

I Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 3}{2u_n}$.

On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-3}{2x}$, définie sur $]0; +\infty[$.



1. Démontrer que f est croissante sur $]0; +\infty[$.
2. (a) Dans le repère ci-dessus, construire sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

   (b) Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 3]$.
4. Démontrer la conjecture faite au 2)b) quant à la monotonie de la suite (u_n).
5. On pose $w_n = 3 - u_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{2u_n}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} w_n$.

   (c) Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (w_n) puis quant à celle de la suite (u_n).

II On rappelle que si a est un réel positif et si n est un entier naturel, alors $(1+a)^n \geqslant 1 + a\,n$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $2^n > n$.

2) En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{4^n}{n\sqrt{n}}\right)_{n \geqslant 1}$.