

Pour $x \notin \{\frac{1}{3}, 0\}$, on a $f(x) = \frac{x - 6 \times \frac{1}{x}}{3 - \frac{1}{x}}$.

• Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 6 \times \frac{1}{x}) = -\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - \frac{1}{x}) = 3 - 0 = 3$ } donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

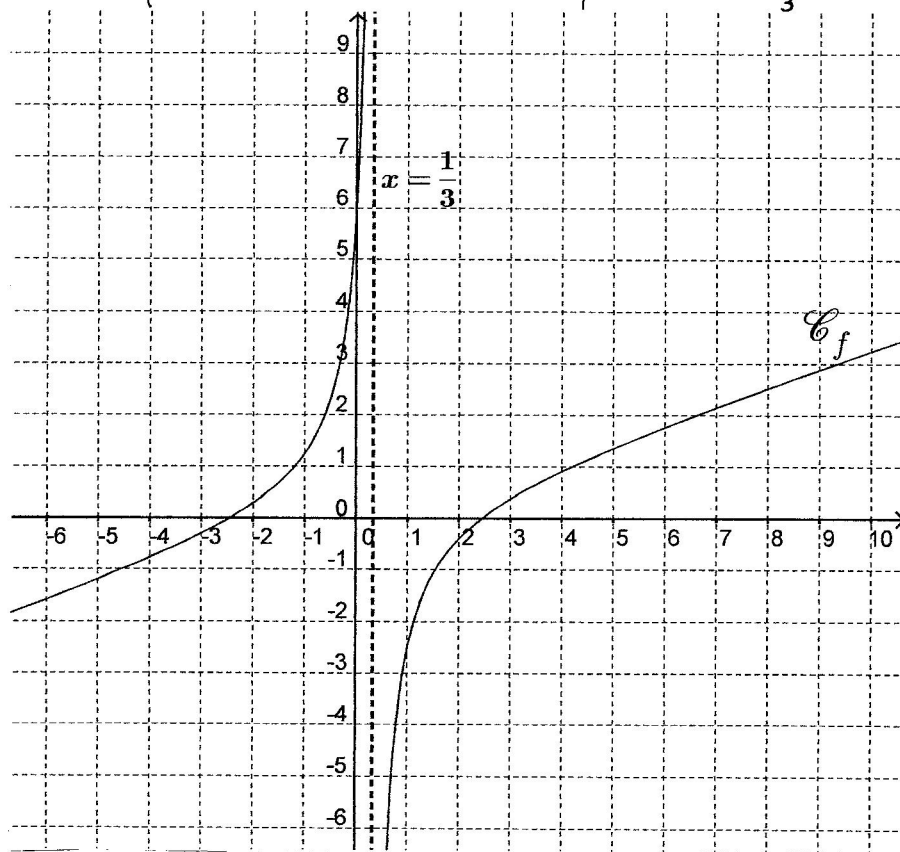
• Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 6 \times \frac{1}{x}) = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{x}) = 3 - 0 = 3$ } donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (x^2 - 6) = (\frac{1}{3})^2 - 6 = -\frac{53}{9} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 3x - 1 = 0$

- Si $x < \frac{1}{3}$, on a $3x - 1 < 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{3}}} (3x - 1) = 0^-$, d'où par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{3}}} f(x) = +\infty$

- Si $x > \frac{1}{3}$, on a $3x - 1 > 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3}}} (3x - 1) = 0^+$, d'où par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3}}} f(x) = -\infty$

→ On en déduit que la droite (verticale) d'équation $x = \frac{1}{3}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.



Remarque: la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - 6}{3x - 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, par produit, somme et quotient de dérivée $f': x \mapsto \frac{2x(3x - 1) - 3(x^2 - 6)}{(3x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 2x + 18}{(3x - 1)^2}$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, on a $(3x - 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $3x^2 - 2x + 18$ dont le discriminant vaut $\Delta = -212 < 0$; par conséquent: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, f'(x) > 0$ (du signe de $a = 3$).
 CONSÉQUENCE: f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$.