Devoir de Pâques

• Exercice I

1) Prouver que $g : x \mapsto e^x[\cos(2x) + 2\sin(2x)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

3) Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi e^x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^\pi e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$ pour en déduire les valeurs de I et J.

• Exercice II

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$

1. a. Dresser le tableau des variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par : $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

a. Trouver deux réels a et b tels que la fonction $H : x \longmapsto (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $h : x \longmapsto (x+2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

b. Utiliser la question 1.b. pour démontrer que : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

c. Démontrer que $J + K = 4I$.

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.