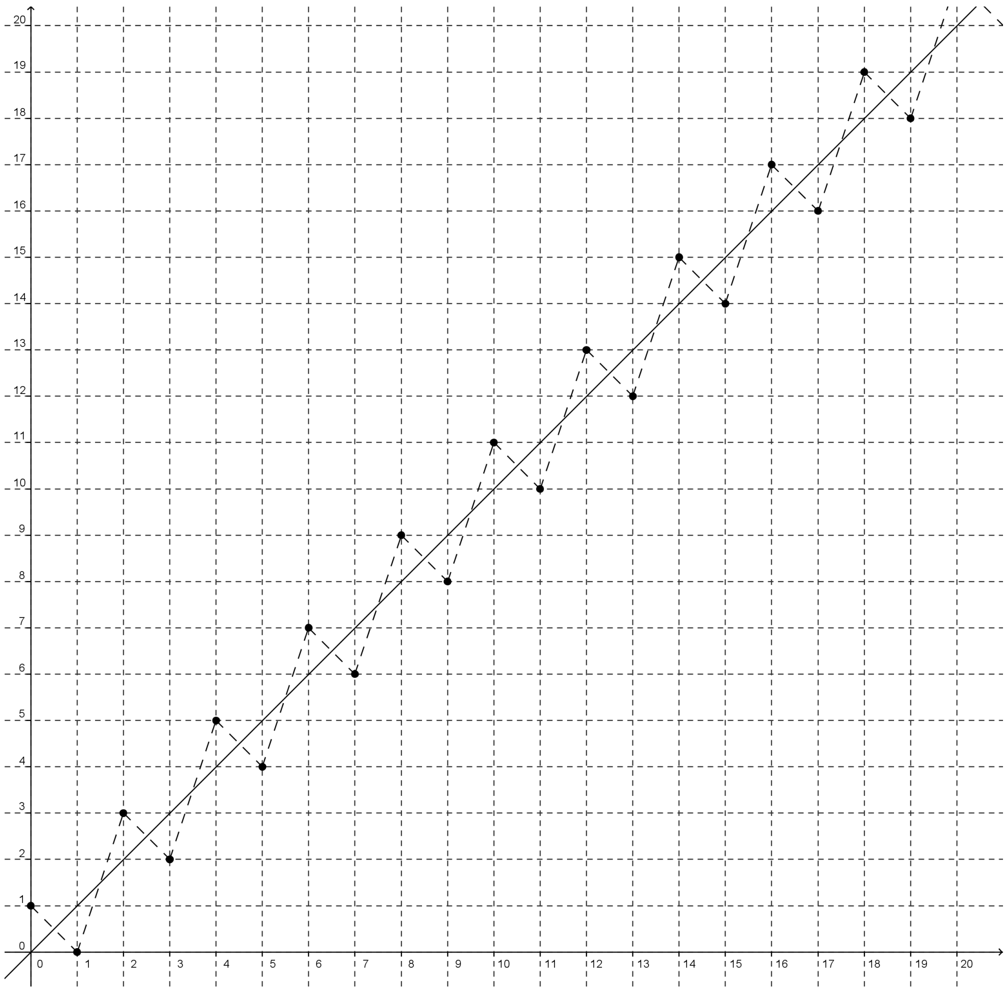
TS - Mathématiques - Correction du VRAI/FAUX sur les suites

1) FAUX.



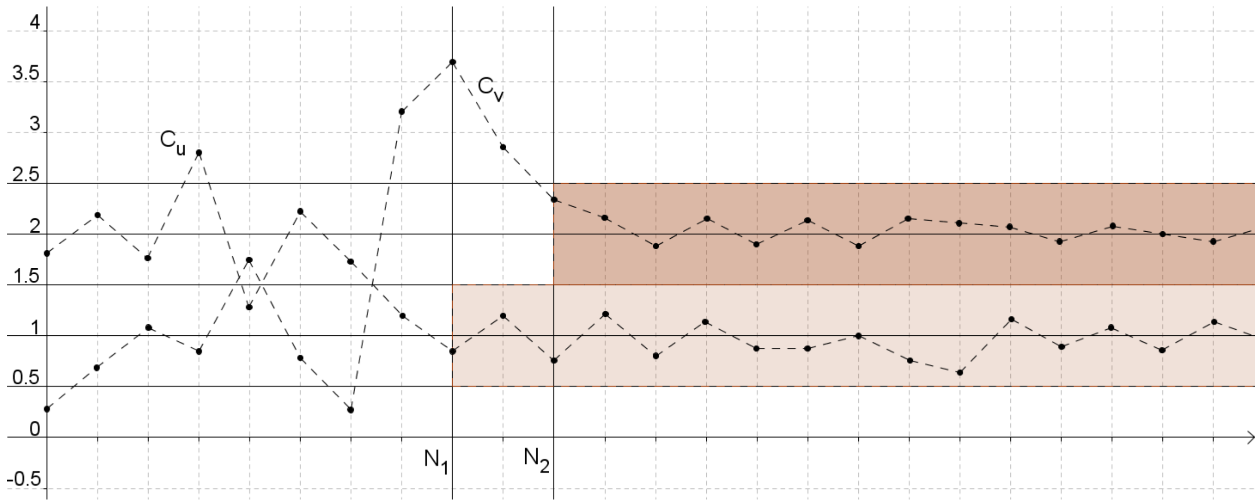
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n + (-1)^n$ constitue un contrexemple (voir le graphe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessus).
En effet, si n est pair : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} - u_n = (2k+1) + (-1)^{2k+1} - [2k + (-1)^{2k}] = 2k + 1 - 1 - 2k - 1 = -1$. Et si n est impair : $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} - u_n = (2k+2) + (-1)^{2k+2} - [2k+1+(-1)^{2k+1}] = 2k+2+1-2k-1+1 = 3$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n$ est alternativement strictement négatif et positif suivant que n est pair ou impair, ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais croissante à partir d'un certain rang.
En revanche pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^n \geqslant -1$ donc $u_n \geqslant n - 1$. Par comparaison, on peut donc affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2) FAUX.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -u_n = (-1)^{n+1}$ constituent un contrexemple.
En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n + v_n = 0$ et $u_n \times v_n = (-1)^n \times (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$.
Ainsi les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n \times v_n)$ sont constantes donc convergentes alors que ni (u_n),

ni (v_n) ne converge.

3) FAUX.
N'importe quelle suite strictement positive divergeant vers $+\infty$ constitue un contrexemple. En effet dans ce cas la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

4) VRAI.



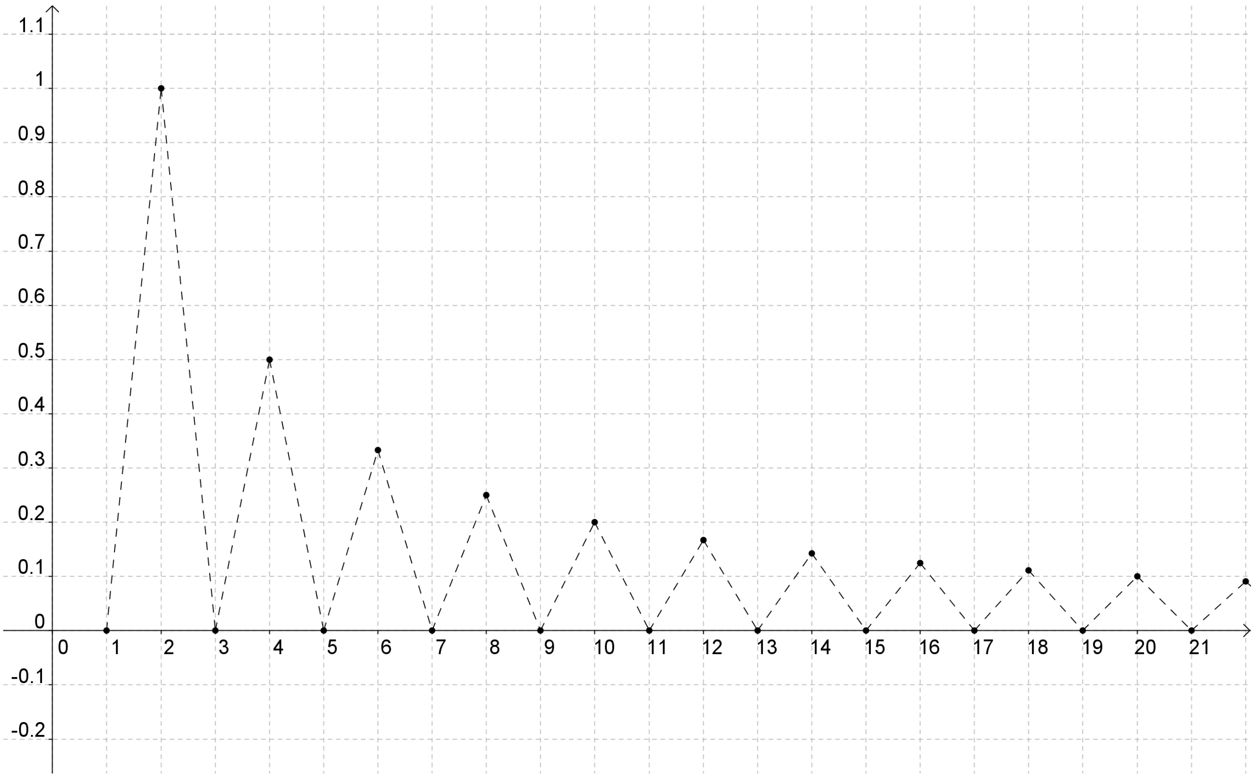
Soit $\epsilon = 0,5$. Comme (u_n) converge vers 1, il existe un entier N_1 tel que $(n \geqslant N_1 \Rightarrow 1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon)$. On a donc en particulier $u_n < 1,5$ dès que $n \geqslant N_1$. D'autre part comme (v_n) converge vers 2, il existe un entier N_2 tel que $(n \geqslant N_2 \Rightarrow 2-\epsilon < v_n < 2+\epsilon)$. On a donc en particulier $v_n > 1,5$ dès que $n \geqslant N_2$.
Maintenant si $n \geqslant \max(N_1; N_2)$, on a $u_n < 1,5 < v_n$.

5) FAUX.
La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ constitue un contrexemple en prenant $a = b = 0$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n < b = 0$ et u converge vers $a = 0$.

6) VRAI.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $(u_n + v_n)$ converge vers un réel l. On a $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ donc par somme, v_n converge vers $l - a$: absurde.

7) FAUX.
La suite constante u définie par $u_n = 0$ et la suite v définie par $v_n = (-1)^n$ constituent un contrexemple. En effet (u_n) converge vers 0 et (v_n) diverge alors que $(u_n v_n)$ est nulle et donc converge (vers 0).

8) FAUX.
Contrexemple : la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$:



La suite u est positive et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n| = \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{|1|+|(-1)^n|}{n} = \frac{2}{n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, on déduit par encadrement que u converge vers 0.

D'autre part $u_{n+1} - u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1+(-1)^n}{n} = \frac{n[1+(-1)^{n+1}]-(n+1)[1+(-1)^n]}{n(n+1)}$

d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{n+n(-1)^{n+1}-n-1+(n+1)(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(2n+1)(-1)^{n+1}-1}{n(n+1)}$.

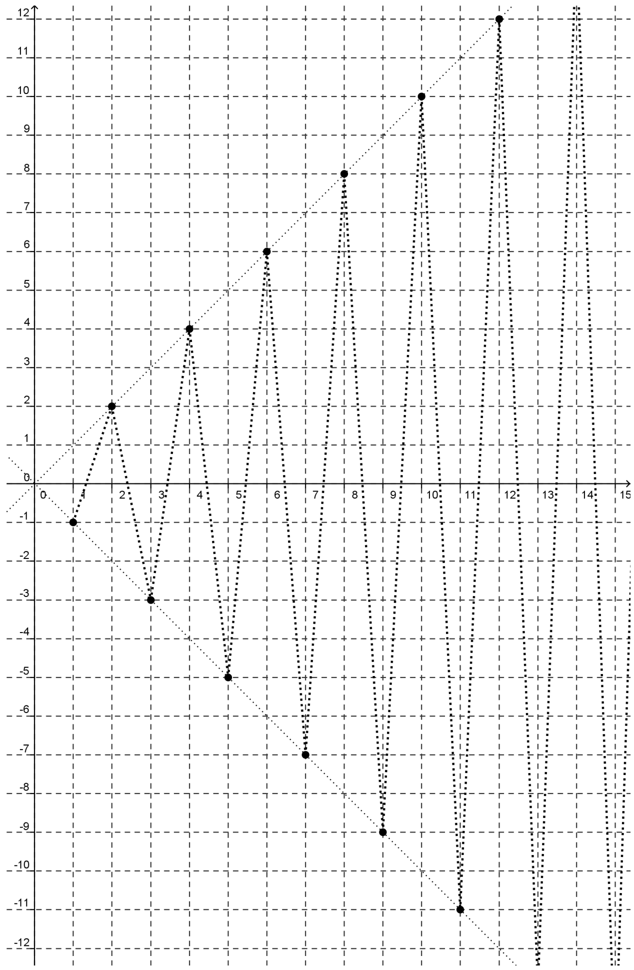
Ainsi $u_{n+1} - u_n = \begin{cases} \frac{-(2n+1)-1}{n(n+1)} = \frac{-2n-2}{n(n+1)} = -\frac{2}{n} < 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{(2n+1)-1}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} > 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

ce qui prouve que la suite u n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

9) FAUX.

La suite u définie par $u_n = n \times (-1)^n$ constitue un contrexemple.

En effet si $k \in \mathbb{N}$, alors $u_{2k} = 2k$ et $u_{2k+1} = -(2k+1)$. La suite u prend donc des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite (négatives ou positives) :



10) VRAI.
En effet, puisque u diverge vers $+\infty$, on sait que pour tout réel M, l'intervalle $]M;+\infty[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang. En choisissant $M=0$, on voit donc que tous les termes de la suite u sont strictement positifs (et donc non nuls) à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.
Si $n \geqslant N$, on peut donc écrire $v_n = \frac{1}{u_n} \times (u_n v_n)$. Or par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$ donc par produit, v converge vers $0 \times a = 0$.

11) VRAI.
En effet, pour tout $\epsilon > 0$, l'intervalle $]1-\epsilon; 1+\epsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En choisissant par exemple $\epsilon = 0,5$, on voit donc que l'intervalle $]0,5;1,5[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N_1. Pour tout $n \geqslant N_1$, on a donc $u_n > 0,5 > 0$.
(le graphe de la suite u de la question n°4 illustre ce propos)

12) VRAI.
On a $u_n > 0$ et $v_n < 1$ donc $u_n \times v_n < u_n \times 1$ d'où $u_n v_n < u_n < 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, la suite u converge vers 1.
Même chose pour la suite v en échangeant les rôles joués par u et v.

13) VRAI.
En effet, pour tout $\epsilon > 0$, l'intervalle $]0-\epsilon; 0+\epsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En choisissant par exemple $\epsilon = 1$, on voit donc que l'intervalle $]-1; 1[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. Comme u est également strictement positive, on a donc pour $n \geqslant N$, $0 < u_n < 1$, ce qui prouve bien que $u_n^2 < u_n$.