# Exercice 2

**Partie A** 1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 3 + 3\times 0 + 3\times(-3) = 9-9=0$

Par conséquent $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, d'où $ABC$ rectangle en $A$.

2) $\mathcal{P}$ ayant pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$, il admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires $\Rightarrow (AB) \perp \mathcal{P}$.

D'autre part, $x_A + y_A + z_A - 3 = 3-2+2-3=0$ donc les coordonnées de $A$ vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}$ ce qui prouve que $A \in \mathcal{P}$.

3) $\mathcal{P}'$ possédant $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, il possède une équation de la forme :

$3x + 0y - 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Comme $A \in \mathcal{P}'$, on a $3x_A - 3z_A + d = 0$, soit $9-6+d=0$

d'où $d=-3$. $\mathcal{P}'$ admet donc pour équation cartésienne $3x-3z-3=0$ ou encore :

$\mathcal{P}' : x - z - 1 = 0$

4) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Delta \iff \begin{cases} M\in\mathcal{P} \\ \text{et} \\ M \in \mathcal{P}' \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \text{et} \\ x-z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1+z)+y+z-3=0 \\ x = 1+z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2-2z \\ x = 1+z \end{cases}$

$\iff$ il existe un réel $t$ tel que : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = t \end{cases}$

**Partie B** 1) On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = -3\times 3 + 6\times 3 - 3\times 3 = -9+18-9=0$

et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -3\times 3 + 6\times 0 - 3\times(-3) = -9+0+9=0$

La droite $(AD)$ est donc orthogonale aux droites $(AB)$ et $(AC)$, sécantes en $A$ et incluses dans le plan $(ABC)$, par conséquent $(AD)\perp(ABC)$.

2) D'après le résultat précédent, $[AD]$ est donc la hauteur issue du sommet $D$ dans le tetraèdre $ABDC$. Par conséquent $\text{Vol}(ABDC) = \frac{1}{3}\times AD \times \text{Aire}(ABC)$

Or $ABC$ étant rectangle en $A$, on a $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} AB\times AC = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|$

soit : $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2}\times\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27}\times\sqrt{18} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$.

D'autre part $AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

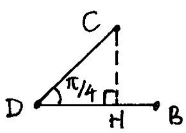
Finalement $\text{Vol}(ABCD) = \frac{1}{3}\times 3\sqrt{6}\times\frac{9\sqrt{6}}{2} = 27$

3) On a $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DB}\|\times\|\overrightarrow{DC}\|\times\cos(\widehat{BDC})$ ; or $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}6\\-3\\+6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$

donc $\cos(\widehat{BDC}) = \dfrac{6\times 6 + (-3)\times(-6) + 6\times 0}{\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2}\times\sqrt{6^2+(-6)^2+0^2}} = \dfrac{54}{\sqrt{81}\times\underbrace{\sqrt{72}}_{6\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$ rad.

4) a)




Soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(DB)$. On a $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{CH}{DC}$

d'où $CH = DC\times\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{72}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6$. On en déduit que :

$\text{Aire}(BDC) = \frac{1}{2}DB\times CH = \frac{1}{2}\sqrt{81}\times 6 = 27$

4) b) Soit $d = d(A,(BDC))$ ; on a $\text{Vol}(ABCD) = \frac{1}{3}d\times\text{Aire}(BCD)$ d'où $\frac{1}{3}d\times 27 = 27$

ce qui implique $d=3$.