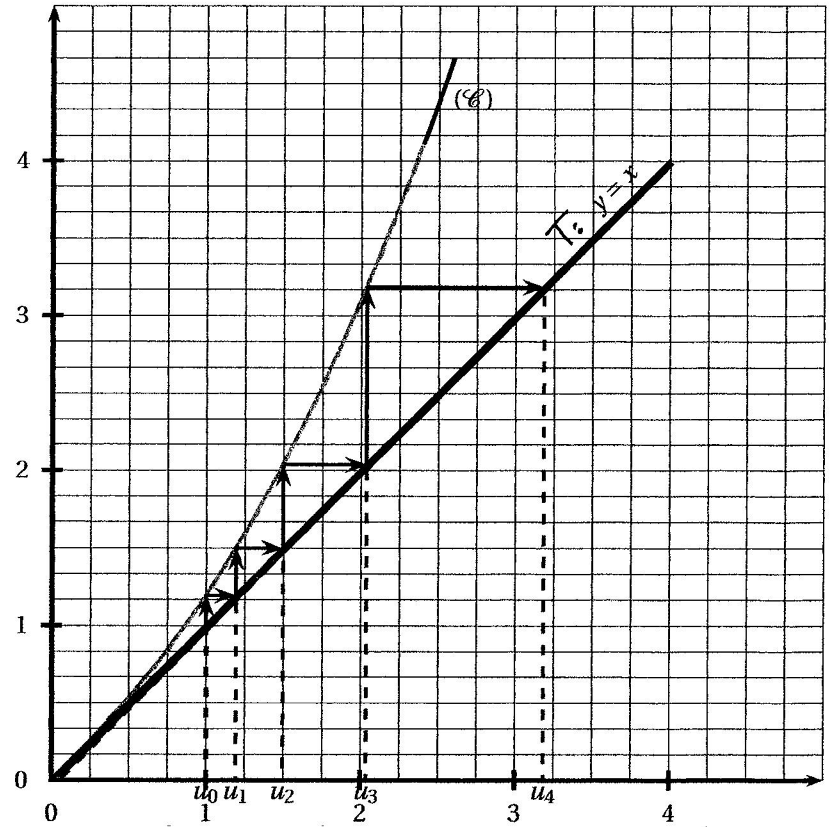
TS Corrigé du devoir de Mathématiques

Exercice n°1 Partie A. 1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ par composition et somme et $\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} + x > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or $f'(0) = \frac{1}{1+0} + 0 = 1$ et $f(0) = \ln(0+1) + \frac{1}{2}0^2 = 0$ d'où $T : y = x$.

3)



Partie B 2) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

3)a) Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n \geq 1$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 1 \geq 1$
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \geq 1$ d'où $f(u_n) \geq f(1)$ par croissance de f sur $[0;+\infty[$, soit $u_{n+1} \geq \ln 2 + \frac{1}{2} \approx 1,19$. On en déduit que $u_{n+1} \geq 1$ et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)b) Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ la proposition : $u_{n+1} \geq u_n$.

- $Q(0)$ est vraie car $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) \approx 1,19$ donc $u_1 \geq u_0$.
- Supposons que $Q(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$; on a $u_{n+1} \geq u_n \geq 1$ donc par croissance de f sur $[0;+\infty[$, $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ce qui prouve que $Q(n+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé par récurrence que $Q(n)$ était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: (u_n) est croissante.

3)c) Raisonnons par l'absurde en supposant que (u_n) soit majorée : comme elle croissante, elle convergerait vers un réel l ($l \geq 1$ car (u_n) est minorée par 1)

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ par continuité de f en l

on en déduit que $f(l) = l$: Ceci est absurde car l'énoncé précise que $\mathscr{C}$ est au dessus de T sur $]0\,;+\infty[$ donc $f(l) > l$ vu que $l \geqslant 1 > 0$.

3) d) La suite (u_n) étant croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

Exercice n° 2 Partie A

1. f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$.

$f = u - \dfrac{\ln v}{v}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$f' = u' - \left(\frac{\ln v}{v}\right)' = u' - \frac{\frac{v'}{v} \times v - v' \ln v}{v^2} = u' - \frac{1 - v' \ln v}{v^2}.$$

Par conséquent, pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

2. On pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

$N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$. Comme x appartient à $]+1\,;\,+\infty[$, $1 + x > 0$. Le numérateur est positif comme somme de nombres strictement positifs. Par conséquent, $N(x) > 0$ pour tout x. On en déduit que N est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

$N(0) = 0$ donc $N(x) < 0$ pour tout x de $]-1\,;\,0[$ et $N(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

$f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ qui est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout x.

Par conséquent, $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

$\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$, on résout l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

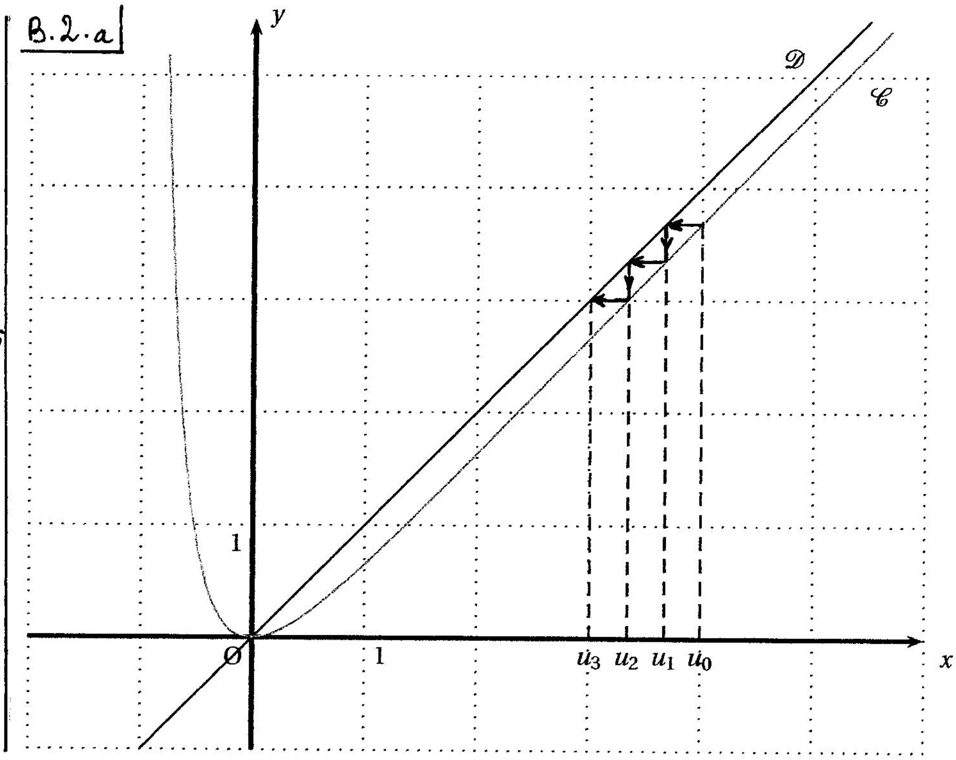
Comme $f(0) = 0$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ se coupent à l'origine.

Partie B

1) Sur $[0;4]$, f est croissante donc $\forall x \in [0;4]$; $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$ or $f(4) = 4 - \frac{\ln 5}{5} < 4$ donc $f(x) \in [0;4]$

2) b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $u_n \in [0;4]$
- $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 4 \in [0;4]$
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;4]$ donc $f(u_n) \in [0;4]$ d'après 1) soit $u_{n+1} \in [0;4] \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie
- Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) c) Notons $Q(n)$ la proposition : $u_{n+1} \leqslant u_n$
- $Q(0)$ est vraie car $u_1 = f(4) < 4 = u_0$.
- Supposons $Q(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc par croissance de f sur $[0;+\infty[$: $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ soit $u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \Rightarrow Q(n+1)$ est vraie.
- Donc $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



2) d) (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc vers un réel $l \geqslant 0$.

2) e) $u_{n+1} = f(u_n)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$; $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ [par continuité de f] donc $f(l) = l \Rightarrow l = 0$ [voir A 3)]