Devoir de Mathématiques

Exercice n°1

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T).

Partie B

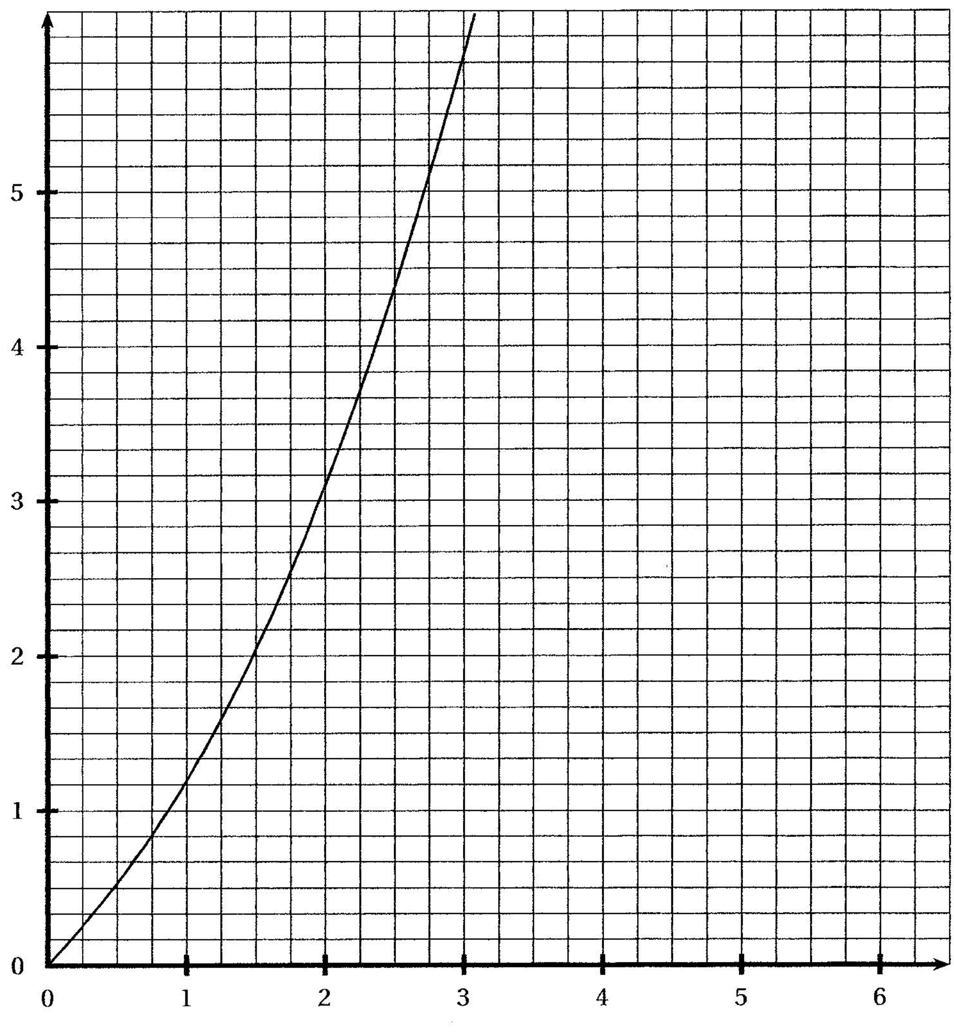
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
3.
   a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

   d. En déduire la limite de la suite (u_n).



Exercice n°2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée ci-dessous, que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
   Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\,;4]$, alors $f(x) \in [0\,;4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a. Sur le graphique ci dessous, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\,;4]$.

   c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

   e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.