TS2 - Correction du contrôle de MATHÉMATIQUES

Mardi 23 avril 2013

Exercice 1

Partie A (Restitution organisée de connaissances)

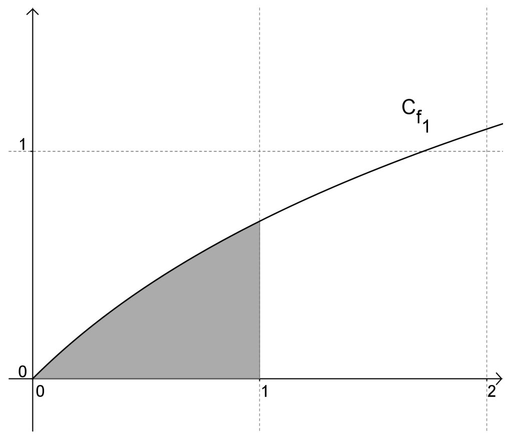
Supposons que pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. On en déduit que $g(t) - f(t) \geqslant 0$ donc d'après le second point des rappels : $\displaystyle\int_a^b [g(t) - f(t)]\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Or d'après le premier point : $\displaystyle\int_a^b [f(t) - g(t)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b [1 \times f(t) + (-1) \times g(t)]\ \mathrm{d}t = 1 \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + (-1) \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

1. (a) On a $f_1(x) = \ln(1+x)$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

   (b) f_1 est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0$, $f_1'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$. f_1 est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   (c) F_1 est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par composition, produit et somme et $\forall x \geqslant 0$, $F_1'(x) = (1+x) \times \frac{1}{1+x} + 1 \times \ln(1+x) - 1$ d'où $F_1'(x) = 1 + \ln(1+x) - 1 = \ln(1+x) = f_1(x)$. F_1 est donc bien une primitive de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Ainsi $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = [F_1(x)]_0^1 = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1$
   soit $I_1 = (2\ln 2 - 1) - (\ln 1 - 0) = 2\ln 2 - 1$.
   I_1 est égal à l'aire (en unités d'aire) du domaine du plan délimité par le graphe de f_1, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$ (domaine hachuré ci-dessous).



2. (a) Comme f_1 est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (voir 1.b.), si $x \in [0; 1]$ on a :
   $f_1(0) \leqslant f_1(x) \leqslant f_1(1)$ soit : $0 \leqslant f_1(x) \leqslant \ln 2$.

Or si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0^n \leqslant x^n \leqslant 1^n$ par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Donc $x^n \in [0;1]$ et on a alors $0 \leqslant f_1(x^n) \leqslant \ln 2$, soit $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln 2$, ou encore $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \ln 2$.

Par positivité de l'intégrale (vu que $1 \geqslant 0$), on en déduit que :

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (\ln 2)\,\mathrm{d}x = [(\ln 2)x]_0^1$, soit : $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

(b) Soit $x \in [0;1]$. On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $x^n \times 0 \leqslant x^n \times x \leqslant x^n \times 1$ car $x^n \geqslant 0$. On a alors $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ d'où $f_1(x^{n+1}) \leqslant f_1(x^n)$ par croissance de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$ (voir 1.b.). Cela prouve que $\ln(1+x^{n+1}) \leqslant \ln(1+x^n)$, soit $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et on peut en déduire par positivité de l'intégrale que $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire que $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.

(c) La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) donc converge.

3. (a) g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par composition et somme et $\forall x \geqslant 0$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) Si $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a $x^n \in [0\ ;\ +\infty[$ donc par décroissance de g sur $[0\ ;\ +\infty[$: $g(x^n) \leqslant g(0)$, soit $\ln(1+x^n) - x^n \leqslant \ln(1+0) - 0 = 0$ ou encore $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.

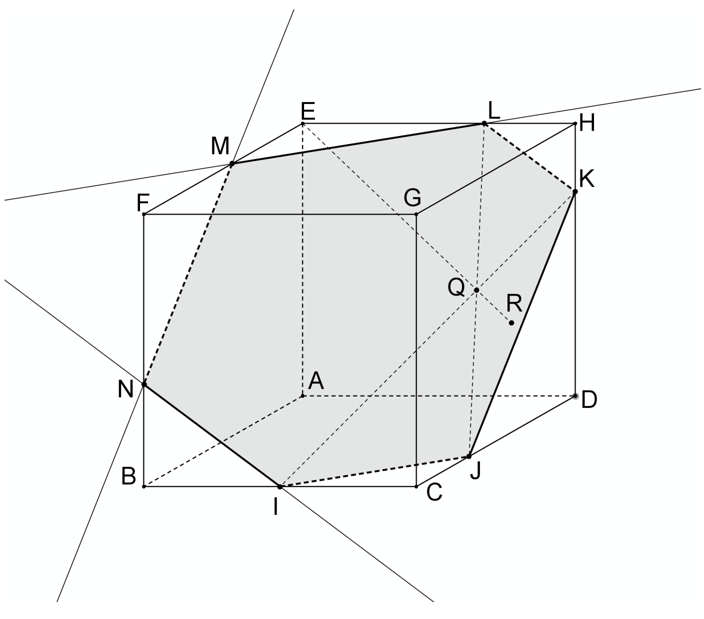
(c) Par positivité de l'intégrale, on déduit de l'inégalité précédente que :

$\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ d'où $0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$, soit :

$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure que la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 2

Figure de la question 5) :



Correction de l'exercice 2

1) On a $I\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}2/3\\1\\0\end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix}0\\1\\3/4\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}$.

2)a) On a $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0-1\\\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\\1-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{6}\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0-1\\1-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\1-\frac{1}{2}\\0-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{IL}=\alpha\overrightarrow{IK}+\beta\overrightarrow{IJ} \iff \begin{cases}-\alpha-\frac{1}{3}\beta=-1\\\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{6}\\\frac{3}{4}\alpha=1\end{cases} \iff \begin{cases}-\alpha-\frac{1}{3}\beta=-1\\\beta=\frac{1}{3}-\alpha\\\alpha=\frac{4}{3}\end{cases} \iff \begin{cases}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\times(-1)=-1 \text{ (VRAI)}\\\beta=-1\\\alpha=\frac{4}{3}\end{cases}$

Conclusion : $\overrightarrow{IL}=\frac{4}{3}\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{IJ}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires. Comme $(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IJ})$ est une base du plan $\mathcal{P}$, cela prouve que $L\in\mathcal{P}$.

2)b) On a $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}0-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}-1\\1-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$: les coordonnées de $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{IK}$ n'étant pas proportionnelles, $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires. Les droites (IK) et (JL) ne sont donc pas parallèles ; comme elles sont coplanaires (incluses dans $\mathcal{P}$, d'après la question précédente), cela prouve bien qu'elles sont sécantes.

3)a) (IK) passe par $I\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$; d'où $(IK) : \begin{cases}x=1-t\\y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\z=\frac{3}{4}t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

(JL) passe par $J\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$ et est dirigée par $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$, d'où $(JL) : \begin{cases}x=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t'\\y=1-\frac{1}{3}t'\\z=t'\end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$

3)b) $Q\in(IK)$ et $Q\in(JL)$ donc il existe des réels t et t' tels que : $\begin{cases}x_Q=1-t=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t'\\y_Q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=1-\frac{1}{3}t'\\z_Q=\frac{3}{4}t=t'\end{cases}$

On obtient : $1-t=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}t$, d'où $\frac{1}{3}=\frac{t}{2}$, soit $t=\frac{2}{3}$.

Finalement $x_Q=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$; $y_Q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ et $z_Q=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ soit $Q\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right)$

4)a) On a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, d'où $(EQ) : \begin{cases}x=\frac{1}{3}t\\y=\frac{5}{6}t\\z=1-\frac{1}{2}t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

4)b) Un point appartient à (GCD) si et seulement si son ordonnée vaut 1.

4)c) Comme $R\in(EQ)$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}x_R=\frac{1}{3}t\\y_R=\frac{5}{6}t\\z_R=1-\frac{1}{2}t\end{cases}$. D'autre part $y_R=1$ donc $\frac{5}{6}t=1$, soit $t=\frac{6}{5}$ et $\begin{cases}x_R=\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}\\y_R=1\\z_R=1-\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\end{cases}$

Finalement $R\left(\frac{2}{5};1;\frac{2}{5}\right)$.

5) N est le point d'intersection de (FB) et de la parallèle à (LK) passant par I.

M est le point d'intersection de (FE) et de la parallèle à (JK) passant par N.