TS2 - Contrôle de MATHÉMATIQUES

Mardi 23 avril 2013

Exercice 1 (10 points)

Partie A (Restitution organisée de connaissances)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
On suppose connus les résultats suivants :

- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\ \mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + x^n)\ \mathrm{d}x$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que la fonction $F_1 : x \mapsto (1 + x)\ln(1 + x) - x$ est une primitive de la fonction f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer alors I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   (b) Étudier les variations de la suite (I_n).
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

   (a) Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de g sur $[0\ ;\ +\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a :

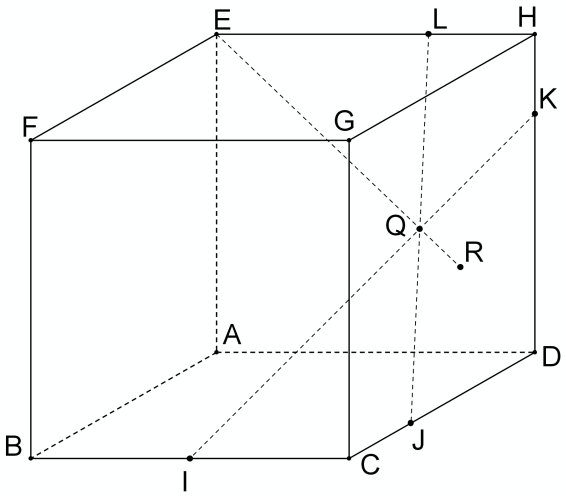
$$\ln(1 + x^n) \leqslant x^n.$$

   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 2 (10 points)

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [BC]. Les points J, K et L sont tels que :

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \quad ; \quad \overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DH} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}\ .$$



On note $\mathscr{P}$ le plan (IJK).
On munit l'espace du repère $\mathscr{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

La question 5) peut être traitée de manière indépendante.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L.
2. (a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IL} = \alpha\,\overrightarrow{IK} + \beta\,\overrightarrow{IJ}$.
   Que peut-on en conclure ?
   (b) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont sécantes.
3. (a) Donner une représentation paramétrique des droites (IK) et (JL).
   (b) En déduire les coordonnées du point d'intersection Q des droites (IK) et (JL).
4. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (EQ).
   (b) À quelle condition sur ses coordonnées, un point appartient-il au plan (GCD) ?
   (c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection R de (EQ) et (GCD).
5. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ sur la figure ci-dessus (expliquer la construction, sans la justifier).