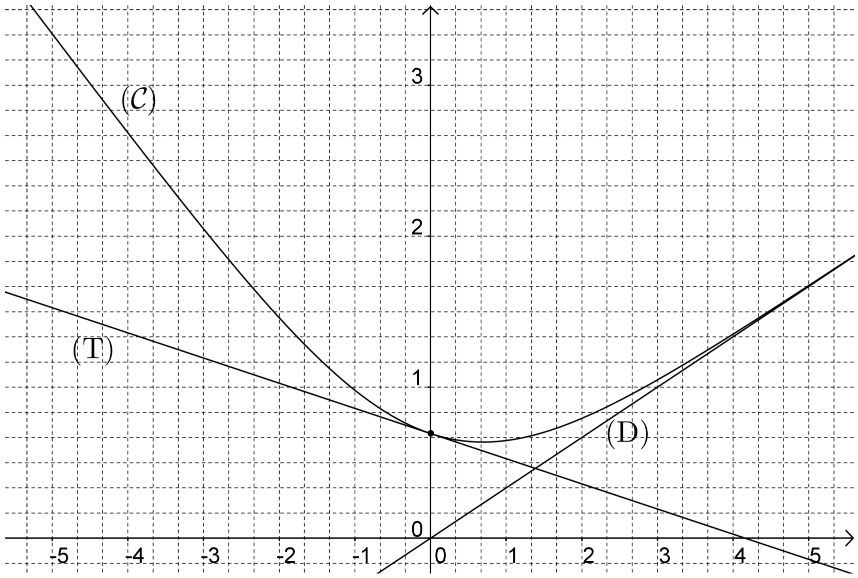
• **Correction de l'exercice 1**

Partie A



1. (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}x = +\infty$, cela prouve par somme que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   (b) Comme $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$, on en déduit que la droite (D) est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

   (c) Comme $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $1+\mathrm{e}^{-x} > 1$ et donc $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) > 0$. Cela entraîne que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $\mathbb{R}$.

   (d) On a $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x$
   $= \ln(\mathrm{e}^x+1) - \ln(\mathrm{e}^x) + \dfrac{1}{3}x = \ln(\mathrm{e}^x+1) - x + \dfrac{1}{3}x = \ln(\mathrm{e}^x+1) - \dfrac{2}{3}x$.

   (e) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+1 = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) = 0$ et comme par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$, on déduit par somme que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) f est dérivable en tant que composée de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x+1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par la fonction ln qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$: cette composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir f étant elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$ est du type $\ln\circ u$ où $u : x \mapsto \mathrm{e}^x+1$ et a donc pour dérivée $\frac{u'}{u} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$. Donc $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3\mathrm{e}^x}{3(\mathrm{e}^x+1)} - \dfrac{2(\mathrm{e}^x+1)}{3(\mathrm{e}^x+1)} = \dfrac{3\mathrm{e}^x - 2(\mathrm{e}^x+1)}{3(\mathrm{e}^x+1)} = \dfrac{\mathrm{e}^x-2}{3(\mathrm{e}^x+1)}$.

   (b) Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2 \iff x > \ln(2)$, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2\ ; +\infty[$.

Partie B

1. On a démontré dans la **partie A** que $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) > 0$ pour tout x réel, donc l'aire entre $(\mathcal{C})$ et (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$, pour n entier naturel non nul, est $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

2. (a) • La fonction $h : t \mapsto \ln(1+t) - t$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ par somme et composition et $h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$. Comme $1 + t > 0$, $h'(t)$ est du signe de $-t$: on a donc $h' > 0$ sur $]-1;0[$ et $h' < 0$ sur $]0;+\infty[$. Ainsi h est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[-1;0]$ (resp. sur $[0;+\infty[$).
   • On a $t = \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc par décroissance de h sur $[0;+\infty[$, $h(t) \leqslant h(0) = 0$ soit $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x} \leqslant \ln(1+0) - 0$ ou encore $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   (b) On a $n \geqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ donc par croissance de l'intégrale :
   $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n = 1 - \mathrm{e}^{-n}$.
   Comme pour tout n on a $\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est donc majorée.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n+1} - d_n = \displaystyle\int_0^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$
   $= \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$ (d'après la relation de Chasles) d'où $d_{n+1} - d_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
   Comme $n + 1 \geqslant n$ et $x \mapsto \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ est positive, on déduit par positivité de l'intégrale que $d_{n+1} - d_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, ce qui prouve $d_{n+1} \geqslant d_n$ et donc que la suite (d_n) est croissante.
   Une suite croissante et majorée étant nécessairement convergente, on en déduit que c'est le cas de $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie C

1. La pente de (T) est donnée par $f'(0)$. C'est donc $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - 2}{3(\mathrm{e}^0 + 1)} = -\dfrac{1}{6}$.

2. Soit x un réel non nul, considérons M et N les deux points de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.
   L'ordonnée de M est donc $y_M = f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \dfrac{2}{3}x$.
   Pour calculer celle de N, on va utiliser l'autre forme de f :
   $y_N = f(-x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-(-x)}\right) + \dfrac{1}{3}(-x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \dfrac{1}{3}x$.
   Le coefficient directeur de (MN) est donc :
   $$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\left[\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \frac{2}{3}x\right] - \left[\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \frac{1}{3}x\right]}{x - (-x)} = \frac{-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x}{2x} = \frac{-\frac{1}{3}x}{2x} = -\frac{1}{6}$$
   Les droites (MN) et (T) ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.