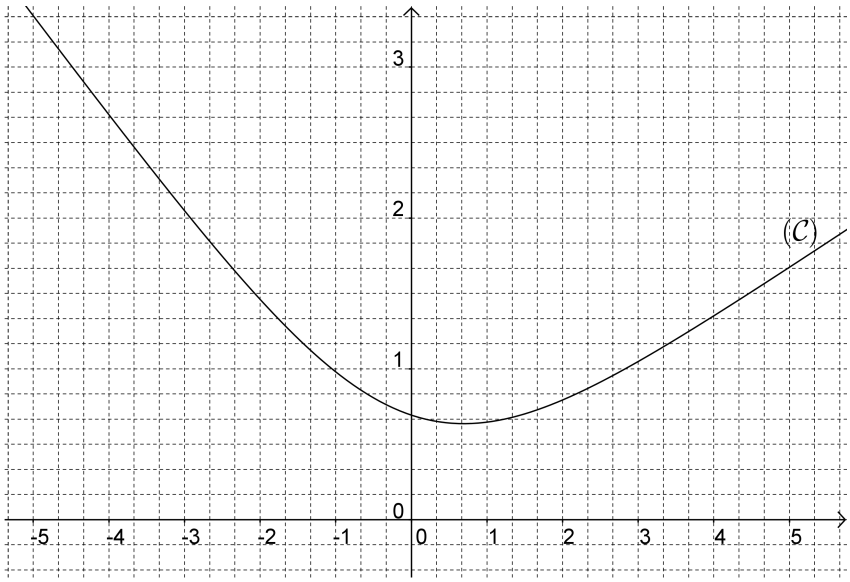
• **Exercice 1**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Soit(D) la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$. Tracer (D).
   (c) Étudier la position relative de (D) et de $(\mathcal{C})$.
   (d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.
   (e) En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 2}{3\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Étudier les variations sur $]-1;+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)-t$.
   En déduire que pour tout réel x, $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathcal{C})$.
On note (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient M et N deux points de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).