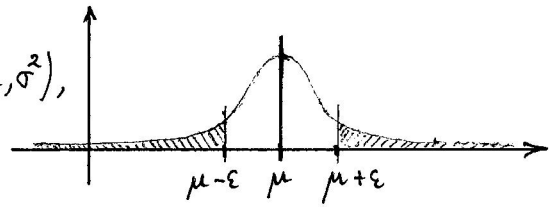


• Exercice 1 1) Lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

on a par symétrie, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$p(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon) = 1 - 2p(X \leq \mu - \varepsilon).$$

En prenant $\mu = 175$ et $\varepsilon = 5$, on obtient $p(170 \leq X \leq 180) = 1 - 2p(X \leq 170)$, soit $p(170 \leq X \leq 180) = 1 - 2 \times 0,02 = 0,96 \rightarrow$ réponse b.

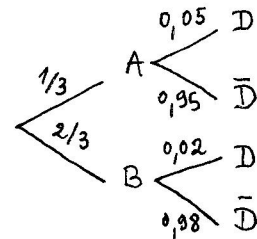


2) La constitution d'un échantillon aléatoire de 50 bonbons peut être modélisée par un schéma de Bernoulli, obtenu en répétant 50 fois de façon indépendante l'épreuve élémentaire "prélever un bonbon issu de la machine A", avec pour succès $S =$ "le bonbon est déformé" et $p = p(S) = 0,05$. Le nombre Z de succès (égal au nombre de bonbons déformés dans l'échantillon) suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,05)$. Ainsi, $p(Z \geq 2) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - [p(Z=0) + p(Z=1)]$, soit

$$p(Z \geq 2) = 1 - \binom{50}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{50} - \binom{50}{1} \times 0,05^1 \times 0,95^{49} \approx 0,72 \rightarrow$$
 réponse a.

(Remarque : on aurait pu obtenir le résultat précédent en saisissant sur la calculatrice (TI) : $1 - \text{binomFRép}(50, 0,05, 1)$.)

3) On peut modéliser la situation par l'arbre ci-contre, en notant $D =$ « le bonbon est déformé ».



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$$

$$= p(A) \times p_A(D) + p(B) \times p_B(D) = \frac{1}{3} \times 0,05 + \frac{2}{3} \times 0,02 = 0,03.$$

La probabilité cherchée est donc $p_D(B) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(B) \times p_B(D)}{p(D)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,02}{0,03} \approx 0,44 \rightarrow$ réponse c.

4) Soit λ le paramètre de la loi exponentielle que suit la variable Y . On a $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$, donc $\frac{1}{\lambda} = 500$, d'où $\lambda = \frac{1}{500} = 0,002$.

On a alors $p(Y \leq 300) = 1 - e^{-0,002 \times 300} = 1 - e^{-0,6} \approx 0,45 \rightarrow$ réponse a.

5) Soit n la taille de l'échantillon ; en notant f_{obs} la fréquence des personnes de plus de 20 ans dans l'échantillon, l'intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95% est $I = \left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$. L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche donc à déterminer à partir de quelle valeur de n ,

$$\text{on a } \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{2}{0,05} \leq \sqrt{n} \quad (\text{car } 0,05 > 0 \text{ et } \sqrt{n} > 0)$$

$$\Leftrightarrow 40^2 \leq n \quad (\text{par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0; +\infty[).$$

Le nombre minimal de clients à interroger est donc $n = 1600 \rightarrow$ réponse c.

• Exercice 2

1) Si $t=0$, on a $\begin{cases} x_A = 2+t \\ y_A = 3-t \\ z_A = t \end{cases}$ donc $A \in d_1$.

2) On a $d_1: \begin{cases} x = 2 + 1 \times t \\ y = 3 + (-1) \times t \\ z = 0 + 1 \times t \end{cases}$ donc $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige la droite d_1 .

et $d_2: \begin{cases} x = -5 + 2 \times t' \\ y = -1 + 1 \times t' \\ z = 5 + 0 \times t' \end{cases}$ donc $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirige la droite d_2 .

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ n'étant pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$), les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

[Remarque: comme on admet dès le départ que les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires, il est clair d'emblée que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles ...].

3) On a $\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-1) \times (-2) + 1 \times (-3) = 1 + 2 - 3 = 0$ donc $\vec{u}_1 \perp \vec{v}$.

De même, $\vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times (-3) = 2 - 2 + 0 = 0$ donc $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$.

4) a) Soit le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$, donc $\vec{n} \perp \vec{u}_1$. De même, $\vec{n} \cdot \vec{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0$, donc $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Ainsi: $\left. \begin{array}{l} \vec{n} \perp \vec{v} \\ \vec{n} \perp \vec{u}_1 \end{array} \right\} \text{ donc } \vec{n} \text{ est normal au plan } \mathcal{P}.$
 $(\vec{u}_1, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$

Le plan $\mathcal{P}$ possède donc une équation de la forme $5x + 4y - z + d = 0$. Comme $A(2; 3; 0) \in \mathcal{P}$, on a $5 \times 2 + 4 \times 3 - 0 + d = 0$, soit $d = -22$, d'où:

$\mathcal{P}: 5x + 4y - z - 22 = 0$.

4) b) d_2 est dirigée par $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

On a $\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 5 \times 2 + 4 \times 1 + (-1) \times 0 = 14 \neq 0$ donc d_2 et $\mathcal{P}$ sont sécants.

Or $B\left(\frac{3}{5}\right) \in \mathcal{P}$ car $5 \times 3 + 4 \times 3 - 5 - 22 = 0$ et $B \in d_2$ car on a

$\begin{cases} x_B = -5 + 2t' \\ y_B = -1 + t' \\ z_B = 5 \end{cases}$, avec $t' = 4$. Ainsi $\mathcal{P} \cap d_2 = \{B\}$.

5) a) Δ passe par $B\left(\frac{3}{5}\right)$ et est dirigé par $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc possède pour représentation paramétrique: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

5) b) d_1 et Δ ne sont pas parallèles (en fait, $d_1 \perp \Delta$ car $\vec{u}_1 \perp \vec{v}$) et sont toutes les deux incluses dans le plan $\mathcal{P}$; en effet:

• d_1 est dirigée par $\vec{u}_1$ qui est un vecteur de $\mathcal{P}$ donc $d_1 \parallel \mathcal{P}$. Comme $d_1 \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ (car $A \in d_1 \cap \mathcal{P}$), on en déduit que $d_1 \subset \mathcal{P}$.

• Δ est dirigée par $\vec{v}$ qui est un vecteur de $\mathcal{P}$ donc $\Delta \parallel \mathcal{P}$; comme $\Delta \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ (car $B \in \Delta \cap \mathcal{P}$), on en déduit que $\Delta \subset \mathcal{P}$.

Ainsi Δ et d_1 sont sécantes (car coplanaires et non parallèles).

Solution n°2: montrer que le système suivant, fondé sur des représentations

paramétriques de d_1 et Δ :
$$\begin{cases} 2+t = 3+t'' \\ 3-t = 3-2t'' \\ t = 5-3t'' \end{cases}$$
, possède un unique couple de solutions (t, t'') .

5)c) On a $\vec{v} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{v} \perp \vec{u}_2$ donc $\Delta \perp d_1$ et $\Delta \perp d_2$.

D'autre part, d_1 et Δ sont sécantes d'après la question précédente.

Enfin, d_2 et Δ sont également sécantes (elles sont orthogonales car $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$ et ont le point B en commun).

Ainsi, Δ répond bien au problème posé.

• Exercice 3 A)1) On a $f(t_{0,5}) = \frac{1}{2} f(0)$, soit $20e^{-0,1t_{0,5}} = 10 \Leftrightarrow e^{-0,1t_{0,5}} = 0,5$
 $\Leftrightarrow -0,1t_{0,5} = \ln 0,5 \Leftrightarrow t_{0,5} = \frac{\ln 0,5}{-0,1} = 10 \ln 2 \approx 6,9$

A)2) On cherche les valeurs de t telles que $f(t) \leq 0,2 \Leftrightarrow 20e^{-0,1t} \leq 0,2$
 $\Leftrightarrow e^{-0,1t} \leq 0,01$ (car $20 > 0$) $\Leftrightarrow -0,1t \leq \ln 0,01$ (par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$)
 $\Leftrightarrow t \geq -\frac{\ln 0,01}{0,1}$ (car $-0,1 < 0$) $\Leftrightarrow t \geq 10 \ln 100 \approx 46,1$

A)3) Soit $x \geq 0$; on a $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x 20e^{-0,1t} dt = \left[\frac{20}{-0,1} e^{-0,1t} \right]_0^x = \left[-200 e^{-0,1t} \right]_0^x$,

soit $\int_0^x f(t) dt = -200 e^{-0,1x} + 200 e^0 = 200 - 200 e^{-0,1x}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,1x) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,1x} = 0$,

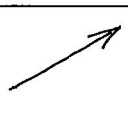
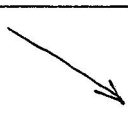
puis par somme et produit: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 200 - 200 \times 0 = 200$.

B)1) La fonction $g: t \mapsto 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ par composition, somme et produit et $\forall t \geq 0$, $g'(t) = 20(-0,1e^{-0,1t} - (-1)e^{-t}) = -2e^{-0,1t} + 20e^{-t}$,
 soit $g'(t) = 20e^{-t} - 2e^{0,9t-t} = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t})$.

B)2) Si $t \in [0; +\infty[$, on a $g'(t) = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t})$ et $20e^{-t} > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $1 - 0,1e^{0,9t}$. Or $1 - 0,1e^{0,9t} \geq 0 \Leftrightarrow 0,1e^{0,9t} \leq 1 \Leftrightarrow e^{0,9t} \leq 10$ (car $0,1 > 0$)
 $\Leftrightarrow 0,9t \leq \ln 10$, par stricte croissance de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

$\Leftrightarrow t \leq \frac{\ln 10}{0,9}$ (car $0,9 > 0$). On en déduit les variations de g :

La concentration plasmatique du médicament est donc maximale lorsque $t = \frac{\ln 10}{0,9}$, ce qui correspond à $60 \times \frac{\ln 10}{0,9}$ minutes ≈ 154 min
 (= 2h 34 min)

t	0	$\frac{\ln 10}{0,9}$	$+\infty$
g			
g'(t)	+	0	-

c) 1) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

• On a $40 - 40 \times 0,5^1 = 40 - 20 = 20 = u_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang n : on a $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ donc $u_{n+1} = 0,5 u_n + 20 = 0,5 (40 - 40 \times 0,5^n) + 20 = 20 - 40 \times 0,5^{n+1} + 20$, d'où $u_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

c) 2) Comme $0,5 \in]-1; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, d'où par produit et somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40 - 40 \times 0 = 40.$$

c) 3) Il s'agit de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n > 38$, ce qui équivaut à $40 - 40 \times 0,5^n > 38 \Leftrightarrow 40 \times 0,5^n < 2 \Leftrightarrow 0,5^n < 0,05$

$\Leftrightarrow \ln(0,5^n) < \ln 0,05$ (par stricte croissance de $\ln$ sur $]0; +\infty[$)

$$\Leftrightarrow n \ln 0,5 < \ln 0,05 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,5} \quad (\text{car } \ln 0,5 < 0, \text{ vu que } 0 < 0,5 < 1)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 5 \quad (\text{car } n \in \mathbb{N}^*)$$

Il faut donc 5 injections pour atteindre l'équilibre.

• Exercice 4 A) 1) P_6 est constitué de 6 triangles superposables : chacun a le même angle au sommet O donc $\widehat{A_6 O B_6} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Comme $OA_6 = OB_6$, on en déduit que $OA_6 B_6$ est équilatéral. On a également :

$$\text{Aire}(OA_6 B_6) = \frac{1}{6} \text{Aire}(P_6) = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

A) 2) Notons I le milieu de $[OA_6]$. En raisonnant

dans le triangle OIB_6 , rectangle en I , on obtient

$$\sin 60^\circ = \frac{IB_6}{OB_6}, \text{ soit } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{IB_6}{r_6}.$$

La hauteur du triangle $OA_6 B_6$ issue du sommet B_6 a donc pour longueur $IB_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_6$

A) 3) L'aire du triangle $OA_6 B_6$ est égale à $\frac{1}{2} OA_6 \times IB_6 = \frac{1}{2} r_6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} r_6 = \frac{\sqrt{3}}{4} r_6^2$,

$$\text{d'où } \frac{\sqrt{3}}{4} r_6^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow r_6^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \quad \text{car } r_6 \geq 0.$$

B) 1) Notons H le pied de la hauteur issue de B_m

dans le triangle $OA_m B_m$. En raisonnant dans le

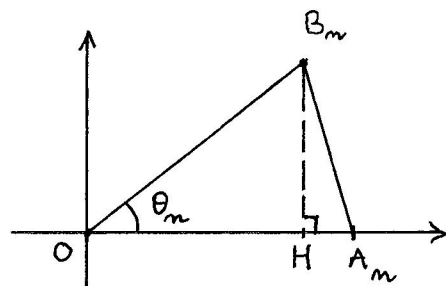
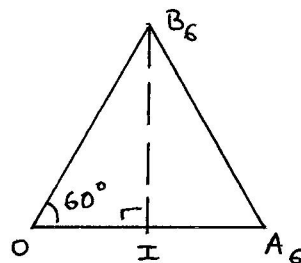
triangle $OH B_m$, rectangle en H , on obtient :

$$\sin \theta_m = \frac{HB_m}{OB_m} = \frac{HB_m}{r_m}, \text{ d'où } HB_m = r_m \sin \theta_m \quad (\text{la}$$

hauteur cherchée). L'aire du triangle $OA_m B_m$ est alors égale à :

$$\frac{OA_m \times HB_m}{2} = \frac{r_m \times r_m \sin \theta_m}{2} = \frac{1}{2} r_m^2 \sin \theta_m.$$

B) 2) En généralisant le raisonnement fait en A) 1), on trouve que :



aire $(OA_n B_n) = \frac{1}{n}$ et $\theta_n = \widehat{A_n O B_n} = \frac{2\pi}{n}$ (en radians). On déduit de la question précédente que $\frac{r_n^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n}$, d'où $r_n^2 = \frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}}}$ car $r_n \geq 0$.

c)1) Soit un entier $n \geq 4$; on a $2 < n < n+1$ donc par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$: $\frac{1}{2} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, d'où $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$
car $n > 0$

et enfin $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$ (car $2\pi > 0$).

Comme f est strictement croissante sur $]0; \pi[$, on en déduit que:

$f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, d'où $\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ car $\frac{1}{\pi} > 0$ et comme la fonction

$x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$, soit

$r_{n+1} < r_n$, ce qui prouve la (stricte) décroissance de la suite $(r_n)_{n \geq 4}$.

c)2) La suite $(r_n)_{n \geq 4}$ étant décroissante et minorée (par 0 car $r_n \geq 0$), elle converge. Remarque: il n'est pas difficile de prouver que la limite de la

suite est effectivement $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. En effet on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (si on

ne le sait pas, on le démontre en remarquant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin' 0 = \cos 0 = 1$).

Par quotient, on obtient donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} = 0$, on

obtient alors par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1$, d'où par produit et composition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

c)3) En sortie, l'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier n tel que $r_n \leq 0,58$.

Il s'agit de $n = 11$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
Graph1	Graph2	Graph3	
Y1=2/(X*sin(2*pi/X))			
Y2=			
Y3=			
Y4=			

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
CONFIG TABLE			
DébutTbl=4			
ΔTbl=1			
Indent: Auto Demande			
Dépendte: Auto Demande			

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
APP SUR + POUR ΔTbl			
X	Y1		
4	0.7071		
5	0.6485		
6	0.6204		
7	0.6045		
8	0.5946		
9	0.588		
10	0.5833		
11	0.5799		
12	0.5774		
13	0.5754		
14	0.5738		