Correction de l'exercice sur les nombres complexes

D'après Bac S, Inde, avril 2012

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Posons $Z = z_1 z_2$. On a $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ donc $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \times \overline{z_1 z_2}$. Or $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ donc $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \times |z_2|^2$. Finalement $|z_1 z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$ donc $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, vu que $|z_1 z_2|$ et $|z_1||z_2|$ sont tous les deux positifs.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

1. (a) On a $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{1 - z_{\mathrm{C}}}{\overline{z_{\mathrm{C}}} - 1} = \dfrac{1 + 2 - \mathrm{i}}{-2 - \mathrm{i} - 1} = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{-3 - \mathrm{i}} = \dfrac{(3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})}{(-3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})}$, soit :
   $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{-9 + 3\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} + 1}{(-3)^2 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{-8 + 6\,\mathrm{i}}{9 + 1} = -0,8 + 0,6\,\mathrm{i}$.

   (b) On a $|z_{\mathrm{C}'}| = \sqrt{(-0,8)^2 + 0,6^2} = \sqrt{0,64 + 0,36} = \sqrt{1} = 1$ donc $\mathrm{OC}' = 1$, ce qui prouve que C′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

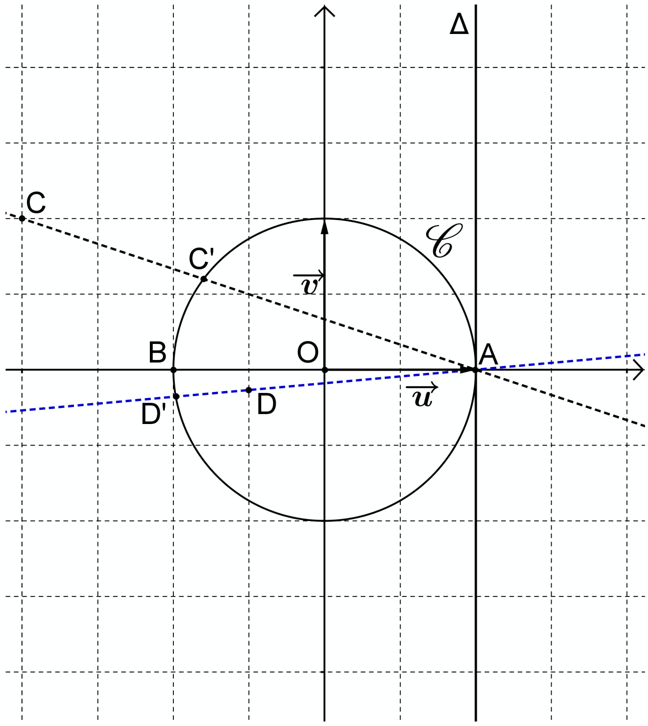
   (c) $\dfrac{z_{\mathrm{C}'} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{-0,8 + 0,6\,\mathrm{i} - 1}{-2 + \mathrm{i} - 1} = \dfrac{-1,8 + 0,6\,\mathrm{i}}{-3 + \mathrm{i}} = \dfrac{0,6(-3 + \mathrm{i})}{-3 + \mathrm{i}} = 0,6 \in \mathbb{R}$ donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{C}'} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \arg(0,6) \equiv 0\,[2\pi]$, ce qui prouve que les points A, C et C′ sont alignés.

2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. $\mathrm{M}(z) \in \Delta \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1 - z}{\overline{z} - 1} = z_{\mathrm{A}} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1 - z}{\overline{z} - 1} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 - z = \overline{z} - 1$ (car $z \neq 1$) $\;\Leftrightarrow\; z + \overline{z} = 2 \;\Leftrightarrow\; 2\,\mathfrak{Re}(z) = 2 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{Re}(z) = 1$. Finalement, M appartient à Δ si et seulement si son abscisse vaut 1. Δ est donc la droite d'équation $x = 1$, privée du point A.

3. Notons que $\overline{z} - 1 = \overline{z} - \overline{1} = \overline{z - 1}$ donc $\mathrm{OM}' = |z'| = \left|\dfrac{1 - z}{\overline{z} - 1}\right| = \dfrac{|1 - z|}{|\overline{z} - 1|} = \dfrac{|1 - z|}{\left|\overline{z - 1}\right|} = \dfrac{|1 - z|}{|z - 1|}$ (car si $Z \in \mathbb{C}$, $\left|\overline{Z}\right| = |Z|$), d'où $\mathrm{OM}' = \dfrac{|z - 1|}{|z - 1|} = 1$ (car si $Z \in \mathbb{C}$, $|-Z| = |Z|$).
   M′ appartient donc bien au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

4. Si $z \neq 1$, $\dfrac{z' - 1}{z - 1} = \dfrac{\frac{1 - z}{\overline{z} - 1} - 1}{z - 1} = \dfrac{\frac{1 - z - \overline{z} + 1}{\overline{z} - 1}}{z - 1} = \dfrac{2 - (z + \overline{z})}{(z - 1)(\overline{z} - 1)}$, d'où :
   $\dfrac{z' - 1}{z - 1} = \dfrac{2 - 2\,\mathfrak{Re}(z)}{(z - 1)(\overline{z - 1})} = \dfrac{2 - 2\,\mathfrak{Re}(z)}{|z - 1|^2} \in \mathbb{R}$.
   On en déduit que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}; \overrightarrow{\mathrm{AM}'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z' - 1}{z - 1}\right) \equiv 0\,[\pi]$, ce qui prouve que les points A, M et M′ sont alignés.

5. D'après ce qui précède, A, D et D′ sont alignés et D′ appartient à $\mathscr{C}$. D′ est donc un des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite (AD). Mais comme $\mathrm{D} \notin \Delta$, on a $\mathrm{D}' \neq \mathrm{A}$ (Cf B.2.), d'où la construction de D′ :



Δ
C
C'
$\mathscr{C}$
$\vec{v}$
B
O
A
D'
D
$\vec{u}$