Épreuve de Mathématiques

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

14 mai 2016

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5, ainsi qu'une feuille annexe à rendre avec la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
L'usage du téléphone portable, y compris en tant que montre ou calculatrice, est strictement interdit.
Le prêt ou l'échange de calculatrice en cours d'épreuve est strictement interdit.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\ .$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.
2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   (c) Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

   (a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$?
   (b) Pour $P = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.
   Que peut-on en déduire pour le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$?
   (b) On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   (c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6,A_7,A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}\ .$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

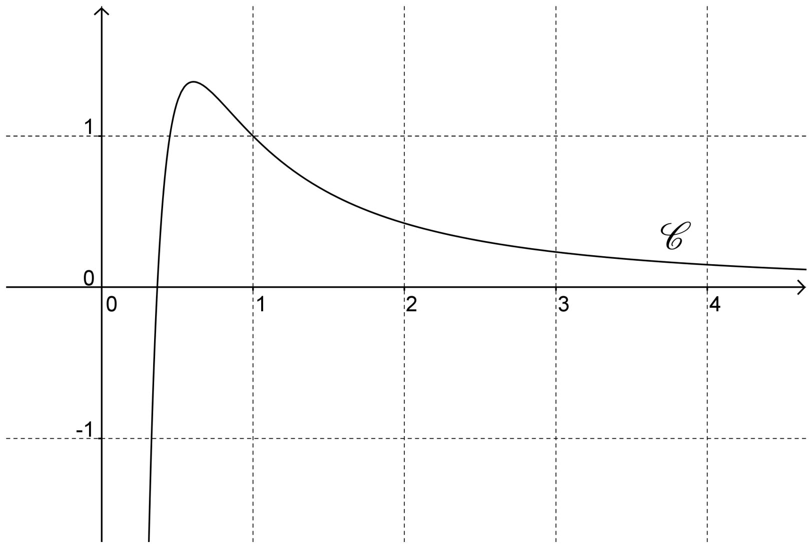
   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}\ .$$

   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   (a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

   (b) On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Calculer I_n en fonction de n.

   (c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 (5 points)

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1$^{\text{er}}$ niveau, 75 vont au 2$^{\text{e}}$ niveau et 100 vont au 3$^{\text{e}}$ niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2$^{\text{e}}$ niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

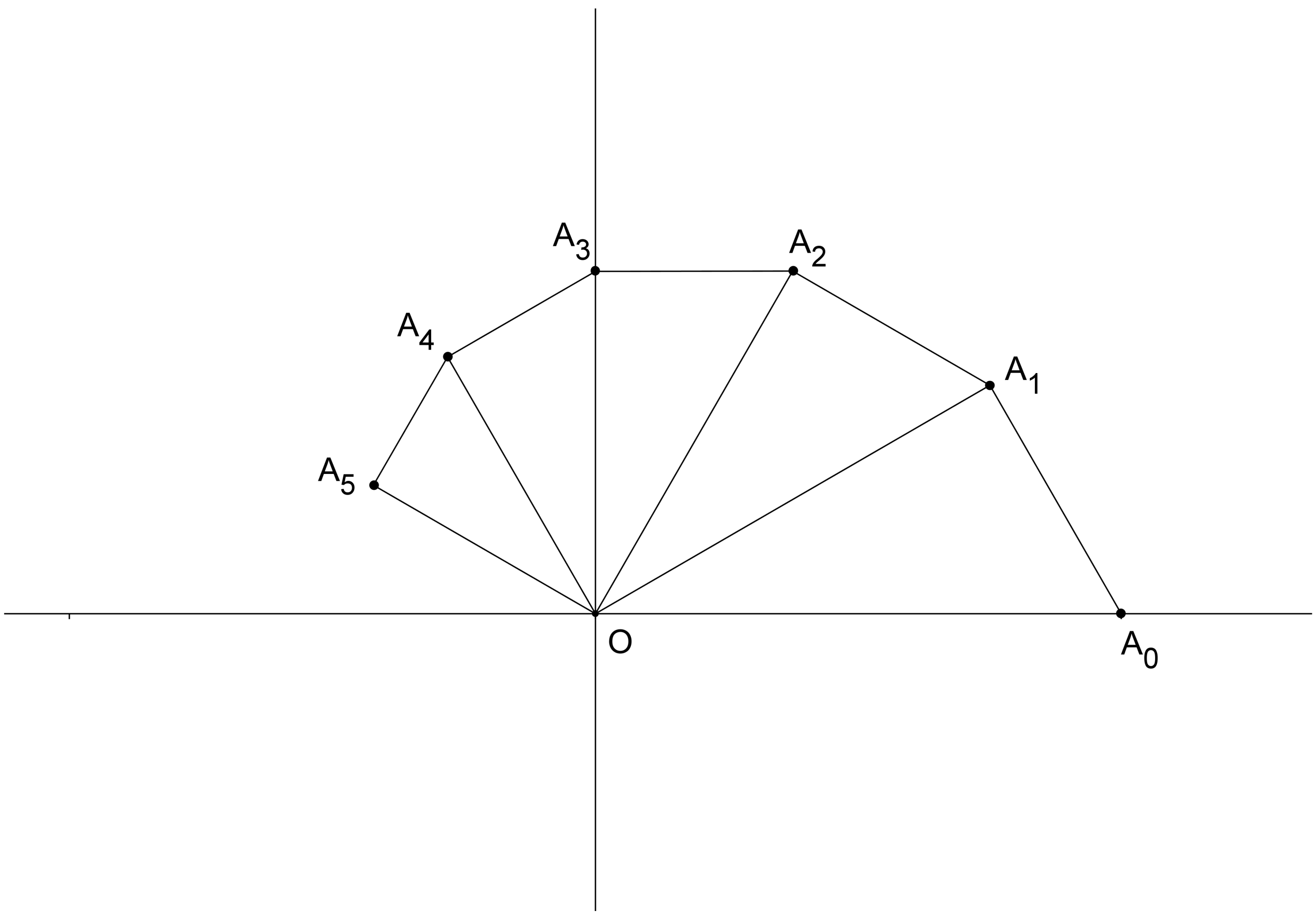
On pourra considérer les événements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Montrer que la probabilité que la personne aille au 2$^{\text{e}}$ niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.
   (b) Montrer que les événements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.
   (c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{\text{e}}$ niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{e}}$ niveau.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2$^{\text{e}}$ niveau.
   (c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2$^{\text{e}}$ niveau ?
4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins une personne va au 2$^{\text{e}}$ niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

Annexe de l'exercice 1

À compléter et à joindre à la copie



NOM : ____